

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2013	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 H
	Coefficient : 4
Section: MATHEMATIQUES	SESSION PRINCIPALE

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations (A_1) , (A_2) , (A_3) et (A_4) ci-dessous, répondre par " Vrai " ou " Faux " en justifiant la réponse.

1) (A_1) : Soit n un entier. " Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ ".

(A_2) : " L'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ".

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2} dt$.

(A_3) : " F est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ ".

(A_4) : " Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de F , $F'(x) = \frac{x}{1 + (\ln x)^2}$ ".

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**), OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A .

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f .

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que $AC = 2AB$.

b) Placer le point C .

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C . On note Ω le centre de g .

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω .

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA}$ et en déduire que $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AC}$.

b) Montrer que $\overline{BG} + \overline{AH} = \overline{OB}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$.

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice 3 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On considère les points $I(1,1,0)$, $J(0,1,1)$ et $K(1,0,-1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{IJ} \wedge \overline{IK}$.

b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est $x - y + z = 0$.

2) Soit le point $S(1,-1,1)$. Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ .

a) Montrer que $\overline{MJ} \wedge \overline{MK} = \overline{IJ} \wedge \overline{IK}$.

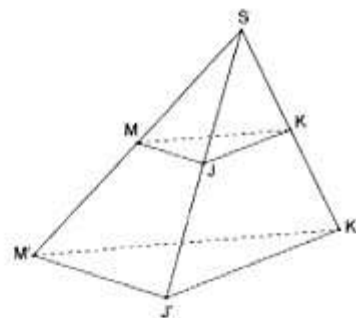
b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.

4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM), [SJ) et [SK) respectivement en M', J' et K'.

Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$.



Exercice 4 : (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\text{Aff}(\overline{EM})$ et $\text{Aff}(\overline{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_p telle que $z_p = (1 - i)\sin\theta \cdot e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overline{EP})}{\text{Aff}(\overline{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\overline{FP})}{\text{Aff}(\overline{FN})}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 : (6 points)

I. Soit la fonction φ définie sur \mathbb{R}^* par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et soit C_φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + \ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g .

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes C_φ , C_f et C_g , des fonctions φ , f et g et la droite d'équation $y = x$.

1) Soit a un réel et b un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b .

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b .

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$).

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a \neq 0$ et $a = \frac{e^a}{e^a - 1}$).

b) En déduire que Δ_a est tangente à la courbe C_f et à la courbe C_g respectivement aux points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$. (α étant la valeur définie dans la question I. 2))

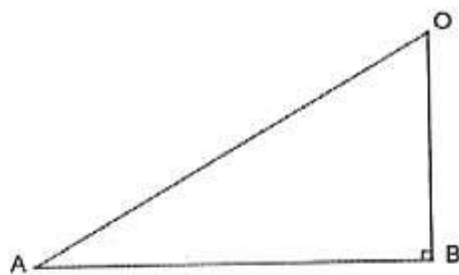
c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), le point $A(\alpha, f(\alpha))$.

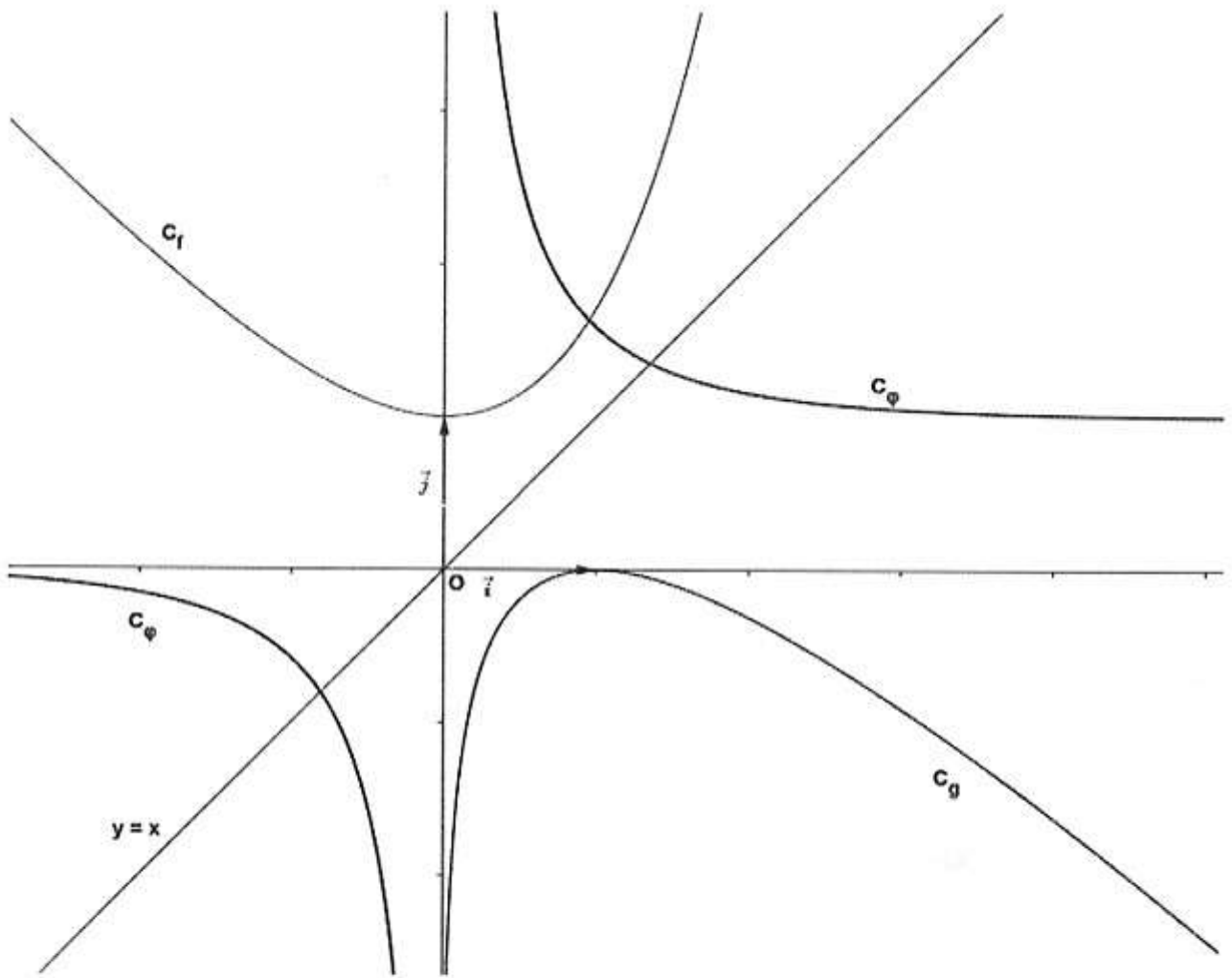
b) Vérifier que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_a .

ANNEXE



(Figure 1)



(Figure 2)