

Session principale Bac 2014

Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x} \right) \frac{-1}{(1+e^x)} = -\infty.$$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de (O, \vec{j}) .

2) a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^{-x}e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x} - 2}{(1+e^x)^2} = -\frac{(2+e^{-x})}{(1+e^x)^2}.$

b) Pour tout réel x , $f'(x) < 0.$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$	0

3) a) (T) : $y = f'(0)x + f(0) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$

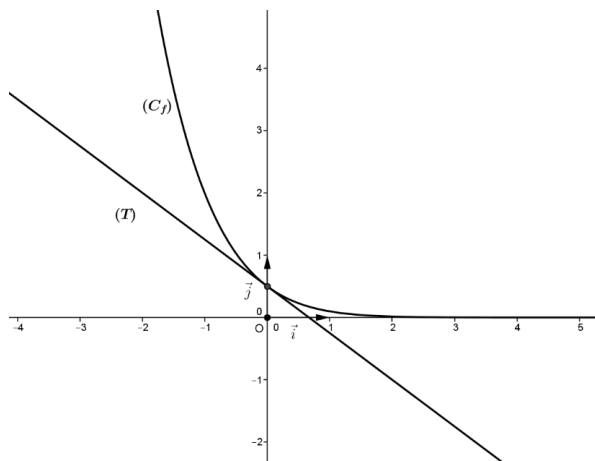
b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) + \frac{3}{4}$	—	○	+
$f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$	↘ 0 ↗		

La fonction $x \mapsto f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ admet un minimum global sur \mathbb{R} égal à 0 donc pour tout réel x ,

$f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$ Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (T).

c)

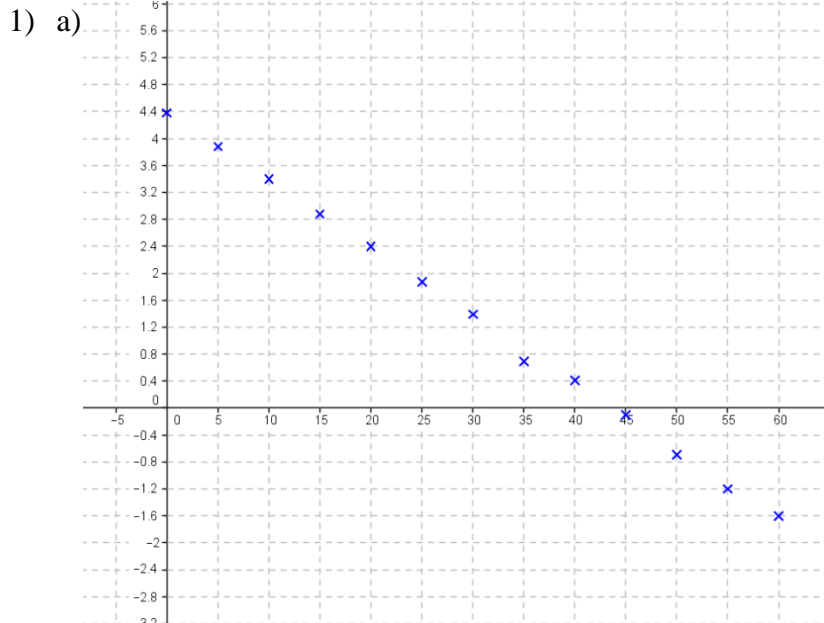


4) a) Pour tout réel x , $e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = f(x)$.

b) $A_\lambda = \int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^\lambda \left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx = \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x}) \right]_0^\lambda = (-e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2) \text{ua}$.

c) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2$.

Exercise 2



$$\rho_{t,\theta} = \frac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t \sigma_\theta} = -0,99.$$

b) Il y a une forte corrélation de plus le nuage a la forme d'une droite donc

$$|\rho_{t,\theta}| = 0,99 > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

un ajustement affine est justifié.

2) a) (D): $\theta = bt + a$ avec $b = \frac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t^2} = -0,1$ et $a = \bar{\theta} - b\bar{t} = 4,39$.

Il en résulte que : (D): $\theta = -0,1t + 4,39$.

b) $\theta = \ln(T - 20) \Leftrightarrow T = 20 + e^\theta = 20 + e^{-0,1t+4,39} = 20 + 80,6e^{-0,1t}$

c) Pour $t = 90$, $\theta = 20 + 80,6e^{-0,1 \times 90} = 20^\circ \text{C}$.

d) $T = 18 \Leftrightarrow 20 + 80,6e^{-0,1t} = 18 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{-2}{80,6} < 0$ impossible donc la température n'atteindra jamais 18°C .

Exercise 3

1) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$ donc S est une sphère de centre O et de rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) $d(O, P) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$ donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2} \text{ et de centre } I \text{ le projeté orthogonal de } O \text{ sur } P.$$

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc $D: \begin{cases} x = t \\ y = 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

$$I(x, y, z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ 6t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ il en résulte que } I(1, 2, 1).$$

2) a) $\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 0 \\ 2 + 0 + 2 - 6 = -2 \neq 0 \end{cases}$ donc $A \in S$ et $A \notin P$.

$$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 0^2 - 8 = 0 \\ 2 + 4 + 0 - 6 = 0 \end{cases} \text{ donc } B \in S \text{ et } B \in P \text{ donc } B \text{ appartient à } (\odot).$$

b) $M(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow y = z.$$

c) $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite $\Delta: \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}$, on pose

$$y = \alpha \in \mathbb{R}, \text{ on aura } \Delta: \begin{cases} x = -3\alpha + 6 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

3) ABC est équilatéral si et seulement si $CA = CB = AB$.

$CA = CB$ donc C est un point de Q et C appartient à (\odot) qui est contenu dans P donc C est un point de Δ , il en résulte qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $C(-3\alpha + 6, \alpha, \alpha)$.

Ainsi pour que ABC soit équilatéral, il suffit que $CA = AB \Leftrightarrow CA^2 = AB^2 \Leftrightarrow$

$$(4 - 3\alpha)^2 + \alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = \frac{6}{11}. \text{ soit } C(0, 2, 2).$$

Exercice 4

1) a) $z_1 + z_2 = -i\sqrt{3}$ et $z_1 \times z_2 = -2$.

b) $\begin{cases} z_1 + z_2 = -i\sqrt{3} \\ z_1 \times z_2 = -2 \end{cases}$ donc z_1 et z_2 sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = 0$, il en

résulte que $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = (z - z_1)(z - z_2)$ où $z \in \mathbb{C}$.

2) a) $OM_1 = |z_1| = \sqrt{2}$ et $OM_2 = |z_2| = \sqrt{2}$ donc M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) $\frac{z_1 + z_2}{2} = -i\sqrt{3} = z_H$

c) Voir figure.

3) a) $K = M * N \Leftrightarrow \frac{z + z^3}{2} = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

b) Il suffit de développer.

c) $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = z_1$ ou $z = z_2$.

$S_C = \{i\sqrt{3}, z_1, z_2\}$

d) Puisque z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc N_1 et N_2 sont les symétriques respectifs de M_1 et M_2 par rapport à K .

e) a est la troisième solution de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc $a = i\sqrt{3}$.

