Mathématiques
Fiches résumées du cours de Géométrie
Niveau : Terminale section Math

Hammadi Dhief

2017 - 2018

Table des matières

Première partie

Nombres complexes

NOMBRES COMPLEXES

I. RAPPEL

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

PRODUITS REMARQUABLES

a et b deux nombres complexes

$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc)$

$(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$,

$(a-ib)^2=a^2-b^2-2iab$,

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

$(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$

1. a et b des réels,

   $\overline{a+ib}=a-ib$ et $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

2. Soit z un nombre complexe.

   - $z+\bar{z}=2\,Re(z)$ • $z-\bar{z}=2i\,Im(z)$
   - $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$ • $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

3. $z=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $z.\bar{z}=a^2+b^2$

1. Soit z un nombre complexe

   $M(z)\Leftrightarrow M(Re(z),Im(z))$.

2. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

3. $I=A*B\Leftrightarrow z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

1. a et b des réels, $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

2. z et z' des nombres complexes.

   - $|z.z'|=|z||z'|$ • $z\neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$
   - $z\neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$ • $|z^n|=|z|^n$
   - $|\bar{z}|=|z|$, $|z|^2=z\bar{z}$

3. $\forall\theta\in IR$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

4. Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

   - $OM=|z|$, M d'affixe z
   - $AB=|z_B-z_A|$

Soit z un nombre complexe non nul et M(z) un point

- $arg(z)\equiv(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM}})[2\pi]$,
- $arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$
- $arg(-z)\equiv\pi+arg(z)[2\pi]$

Si θ est un argument de z alors :

$\cos\theta=\dfrac{Re(z)}{|z|}$ et $\sin\theta=\dfrac{Im(z)}{|z|}$

- $(\vec{u},\overrightarrow{AB})\equiv arg(z_B-z_A)[2\pi]$
- $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)[2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- Soit $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs non nuls.

  * $(\vec{w},\vec{w}')\equiv arg\left(\dfrac{z_{\vec{w}'}}{z_{\vec{w}}}\right)[2\pi]$

  * $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont orthogonaux ssi $\dfrac{z_{\vec{w}'}}{z_{\vec{w}}}\in i\mathbb{R}$

  * $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont colinéaires ssi $\dfrac{z_{\vec{w}'}}{z_{\vec{w}}}\in\mathbb{R}$

- $arg(zz')\equiv arg(z)+arg(z')[2\pi]$,
- $arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\equiv arg(z')-arg(z)[2\pi]$
- $arg(z^n)\equiv n.arg(z)[2\pi]$, $n\in\mathbb{Z}$.
- $z\in IR_+^*\Leftrightarrow arg(z)\equiv 0[2\pi]$
- $z\in IR_-^*\Leftrightarrow arg(z)\equiv\pi[2\pi]$
- $z\in IR\Leftrightarrow z=0$ ou $arg(z)=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $z\in i\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=0$ ou $arg(z)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

RELATIONS ENTRE FORME ALGÉBRIQUE ET FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Forme algébrique

$z = a + ib,\ (a,b) \in IR^2$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$\Leftrightarrow$

$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

Forme trigonométrique

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ r > 0$

II. FORME EXPONENTIELLE

DÉFINITION

Pour tout réel α, *on pose* $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ *et on lit exponentielle* $i\alpha$.

Exemples $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$;

$e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

PROPRIÉTÉS

- $\forall\theta \in IR, \left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta\ [2\pi]$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)},\ ie^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$
- $\forall\theta \in IR, \forall k \in \mathbb{Z},\ e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$

  $\forall\theta,\theta' \in IR,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, on a : $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

DÉFINITION :

Soit z un nombre complexe de module r (r >0) et d'argument θ. *On écrit* $z = r.e^{i\theta}$,

Cette écriture s'appelle forme exponentielle de z.

FORMULES D'EULER

$\forall\alpha \in IR$: $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

1. $\forall\theta \in IR,\ 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\theta-\pi}{2})}$
2. $\forall\alpha,\beta \in IR,\ e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

VI. ÉQUATION $z^n = a$, $n \geq 1$, $a \in C^*$

THÉORÈME ET DÉFINITION

- *Pour tout entier naturel non nul n, l'équation :* $z^n = 1$ *admet dans C n solutions distinctes définies par* $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$
- *Les solutions de l'équation :* $z^n = 1$ *sont appelées racines nièmes de l'unité.*

CONSÉQUENCE

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Lorsque $n \geq 3$, *les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.*

THÉORÈME DÉFINITION

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ *et n un entier naturel non nul, l'équation :* $z^n = a$ *admet dans C n solutions distinctes définies par*

$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

Les solutions de l'équation : $z^n = a$ *sont appelées les racines nièmes de a.*

CONSÉQUENCE

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. *Soit* $a \in \mathbb{C}^*$.

Lorsque $n \geq 3$, *les points images des racines nièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon* $\sqrt[n]{|a|}$.

VI. ÉQUATION $az^2 + bz + c = 0, a \in \mathbb{C}^*$

RACINE CARRÉE

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées
- Soit Δ un nombre complexe non nul.

1) $z = x + iy$ où x et des réels est une racine carré de Δ si et seulement si $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2Re(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$

2) Les racines carrées de Δ sont $\pm\sqrt{|\Delta|}e^{i\left(\frac{\arg(\Delta)}{2}\right)}$

CONSÉQUENCES

- Soit Δ un nombre complexe non nul et δ une racine carrée de Δ.
- Si $\Delta = -2$ Alors $\delta = \pm i\sqrt{2}$
- Si $\Delta = b,\ b \in IR-$ Alors $\delta = \pm i\sqrt{|b|}$
- Si $\Delta = 2i$ Alors $\delta = \pm(1+i)$
- Si $\Delta = -2i$ Alors $\delta = \pm(1-i)$
- Si $\Delta = 5i = \frac{5}{2}(2i)$ Alors $\delta = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1+i)$
- Si $\Delta = -5i = \frac{5}{2}(-2i)$ Alors $\delta = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1-i)$

THÉORÈME ET DÉFINITION

Soit a , b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$, admet dans C, deux solutions définies par : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$
où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$

ATTENTION Si $\Delta \notin IR+$ éviter d'écrire $\delta = \cancel{\sqrt{\Delta}}$

CONSÉQUENCE

Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0,\ a \neq 0$.
Alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

VII. EXEMPLES D'ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 3

THÉORÈME

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n = 0$ et $n \geq 2$.
Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0$.
Si z_0 est un zéro de $P(z)$ alors $P(z) = (z - z_0)g(z)$, où $g(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$.

VIII. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS

SYMÉTRIE ORTHOGONALE D'AXE $(O,\vec{u})$

L'application du plan dans lui qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{u})$.

SYMÉTRIE CENTRALE DE CENTRE O

L'application du plan dans lui qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe - z est la symétrie centrale de centre O.

TRANSLATION DE VECTEUR $\vec{w}$

$\vec{w}$ est un vecteur d'affixe b.
L'écriture complexe de la translation $t_{\vec{w}}$ de vecteur $\vec{w}$, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' = z + b$.

ROTATION

Soit Ω un point d'affixe z_0 et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est :
$z' = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$

HOMOTHÉTIE

Soit Ω un point d'affixe z_0 et k un réel. L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est : $z' = k(z - z_0) + z_0$

THÉORÈME

Soit f l'application : $M(z) \mapsto M'(z' = az + b)$ où a et b sont des nombres complexes.

1. Si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.
2. Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors f est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$.

Deuxième partie

ISOMETRIES DEPLACEMENTS ANTIDEPLACEMENTS

ISOMETRIES– DEPLACEMENTS - ANTIDEPLACEMENTS

A. ISOMÉTRIES

I. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION

Une isométrie du plan est une application du plan dans lui-même qui conserve les distances.

ISOMÉTRIE ET PRODUIT SCALAIRE

f est une isométrie du plan ssi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ pour tous points A, B et C d'images respectives A′, B′ et C′ par f.

PROPRIÉTÉS

- *Les images de deux points distincts par une isométrie sont deux points distincts.*
- *Les images de 3 points non alignés par une isométrie sont 3 points non alignés.*
- *Une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.*
- *Soit f une isométrie*

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \text{ est un repère orthonormé} \\ \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\ f(A)=A',\ f(B)=B', f(C)=C' \text{ et } f(M)=M' \end{array}\right\} \text{alors} \left\{\begin{array}{l} \left(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right) \text{ est un repère orthonormé} \\ \overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'} \end{array}\right.$$

- *Soit f une isométrie*

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{EF} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{CD} \\ f(A)=A',\ f(B)=B', f(C)=C', f(E)=E' \text{ et } f(F)=F' \end{array}\right\} \text{alors } \overrightarrow{E'F'} = \alpha.\overrightarrow{A'B'} + \beta.\overrightarrow{C'D'}$$

- *Une isométrie conserve :*
  Les barycentres en particulier les milieux, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact

THÉORÈME

Toute isométrie est une application bijective et sa réciproque est une isométrie.

THÉORÈME

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et D une droite.
Si $\vec{u}$ est vecteur directeur de D alors $t_{\vec{u}} o S_D = S_D o t_{\vec{u}}$

DÉFINITION

La composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ est appelée symétrie glissante

II°) COMPOSITION D'ISOMÉTRIES

THÉORÈME

- *La composée de deux isométries est une isométrie.*
- *Soit f et g deux isométries. $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$.*
- *Soit f et g deux isométries. $S_\Delta o f o t_{\vec{u}} = g$ signifie $f = S_\Delta o g o t_{-\vec{u}}$*

1. **COMPOSÉE DE DEUX TRANSLATIONS :** $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$
2. **COMPOSÉE DE DEUX SYMÉTRIES ORTHOGONALES :**

Soit Δ et Δ' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

- *Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_\Delta = t_{2\overrightarrow{IJ}}$ où I est un point de Δ et J son projeté orthogonal sur Δ'.*
- *Si Δ et Δ' sont sécantes en I alors $S_{\Delta'} o S_\Delta = R_{\left(I,2\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right)\right)}$*
- *Si $\Delta = \Delta'$ alors $S_\Delta o S_\Delta = Id_p$*
- *Si Δ et Δ' sont perpendiculaires en I alors $S_{\Delta'} o S_\Delta = S_\Delta o S_{\Delta'} = S_I$*

3. COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS

La composée de deux rotations est soit une translation si la somme des angles est nulle soit une rotation si la somme des angles n'est pas nulle.

4. COMPOSÉE DE DEUX SYMÉTRIES CENTRALES

La composée de deux symétries centrales est une translation. $S_B o S_A = t_{2\vec{AB}}$

5. COMPOSÉE DE DEUX SYMÉTRIES GLISSANTES

- *Soit f une symétrie glissante de vecteur* $\vec{u}$. $fof = t_{2\vec{u}}$
- *Soient f et g deux symétries glissantes d'axes respectifs* Δ *et* Δ'.
  - *Si* $\Delta // \Delta'$ *alors fog est une translation*
  - *Si* Δ *et* Δ' *sont sécants alors fog est une rotation.*

6. COMPOSÉE D'UNE TRANSLATION ET D'UNE ROTATION

- *La composée d'une translation et d'une rotation d'angle* $\theta \neq 2k\pi$ *est une rotation d'angle* θ.
- *La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale.*

7. COMPOSÉE D'UNE TRANSLATION ET D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Soit D une droite et $\vec{u}$ *un vecteur non nul.*

- *Si* $\vec{u}$ *est normal à D alors :* $S_D o t_{\vec{u}} = S_{D'}$ avec $D' = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$ et $t_{\vec{u}} o S_D = S_{D''}$ avec $D'' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$
- *Si* $\vec{u}$ *est directeur de D alors :* $S_D o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_D$ symétrie glissante
- *Si* $\vec{u}$ *n'est ni directeur ni normal à D alors :* $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ *où* $\vec{v}$ *directeur et* $\vec{w}$ *normal à D et*
  $S_D o t_{\vec{u}} = S_{D'} o t_{\vec{v}}$, $D' = t_{-\frac{1}{2}\vec{w}}(D)$: symétrie glissante d'axe D' et de vecteur $\vec{v}$.

8. COMPOSÉE D'UNE ROTATION ET D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE *(à démontrer)*

Soit I un point et D une droite. On désigne par R la rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 0$ *et par* S_D *la symétrie orthogonale d'axe D.*

- *Si* $I \in D$ *alors* RoS_D *et* S_DoR *sont des symétries orthogonales.* $(RoS_D \neq S_DoR)$.
- *Si* $I \notin D$ *alors* RoS_D *et* S_DoR *sont des symétries glissantes.* $(RoS_D \neq S_DoR)$.

THÉORÈME

- *Toute translation est la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles.*
- *Toute rotation est la composée de deux symétries axiales d'axes sécants.*
- *Toute isométrie est la composée d'au plus trois symétries axiales.*

III°) ISOMÉTRIES ET POINTS FIXES

1. THÉORÈME

- *Soit f une isométrie distincte de l'identité. Soit A un point d'image A' par f tel que* $A \neq A'$.
  Si M est invariant par f alors M est un point de la médiatrice de [AA'].
- *Une isométrie qui fixe 3 points* ***non alignés*** *est égale à l'identité.*
- *Deux isométries qui coïncident en* ***trois points non alignés*** *sont égales.*
- *Une isométrie distincte de l'identité qui fixe deux points distincts A et B est* $S_{(AB)}$.
- *Une isométrie qui fixe un seul point I est une rotation de centre I.*
- *Une isométrie qui fixe un point est soit l'Idp, soit une rotation soit une symétrie orthogonale.*

2. THÉORÈME

Soit O un point du plan. Toute isométrie du plan se décompose d'une manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O.

3. CONSÉQUENCE

Une isométrie est soit l'identité soit une translation soit une rotation soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.

4. THÉORÈME

Une isométrie sans point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissante.

B. DÉPLACEMENTS - ANTIDÉPLACEMENTS

I. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

THÉORÈME

Toute symétrie orthogonale transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.
On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation.

CONSÉQUENCES

- *La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.*
- *La composée d'un nombre impair de symétries orthogonales transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.*

DÉFINITION

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
On appelle antidéplacement toute isométrie qui transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.

CONSÉQUENCES

Soit f une isométrie du plan

- *f est un déplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales.*
- *f est un antidéplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales*
- *Toute isométrie du plan est soit un déplacement, soit un antidéplacement.*
- *Les déplacements sont : l'idp, les rotations et les translations*
- *Les antidéplacements sont : les symétries axiales et les symétries glissantes.*

THÉORÈME

- *La composée de 2 déplacements est un déplacement.*
- *La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.*
- *La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.*
- *La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.*

II. LES DÉPLACEMENTS

THÉORÈME

- *Un déplacement qui fixe deux points distincts est égal à l'identité.*
- *Deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.*

THÉORÈME

Soit A, B , C et D 4 points tels que AB = CD et AB≠ 0 alors il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f (B) = D.

ATTENTION

*Soit A, B , C et D 4 points tels que AB = CD et AB ≠ 0 alors il existe **deux** déplacements qui envoient le segment [AB] au segment [CD].*

ANGLE D'UN DÉPLACEMENT

DÉFINITION

*Soit f un déplacement. A, B, C et D 4 points tels que AB ≠ 0 et CD ≠ 0. **Si** A', B' , C' et D' sont les images respectives de A, B , C et D par f **alors*** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.

En désignant par θ *une mesure de* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)$*, On dit que f est un déplacement d'angle* θ.

THÉORÈME

- *Un déplacement d'angle nul est une translation*
- *Un déplacement d'angle non nul est une rotation.*
- *Si f est un déplacement d'angle* θ *et g un déplacement d'angle* θ' *alors*
  a) f^{-1} *est un déplacement d'angle -* θ. *b) fog est un déplacement d'angle* $\theta + \theta'$.

DÉPLACEMENTS ET NOMBRE COMPLEXES

THÉORÈME

L'écriture complexe d'un déplacement f est : z' = az + b, où a et b sont deux nombres complexes tels que $|a|=1$.

- *Si a = 1 alors f est une translation de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe b.*
- *Si a ≠ 1 alors f est une rotation de centre I d'affixe* $\frac{b}{1-a}$ *et d'angle arg(a).*

THÉORÈME

Soit f une rotation de centre I d'affixe z_0 et d'angle θ. L'écriture complexe de f est :

$z' = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$.

III. LES ANTIDÉPLACEMENTS

THÉORÈME

Soit f une isométrie.

- *f est un antidéplacement ssi f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales.*
- *f est un antidéplacement ssi f est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales*

CONSÉQUENCES

- *Une isométrie est un antidéplacement ssi c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.*
- *Un antidéplacement est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.*

THÉORÈME

- *Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.*
- *Soit A, B , C et D 4 points tels que AB = CD et AB ≠ 0 alors il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f (B) = D.*

ATTENTION

Soit A, B , C et D 4 points tels que AB = CD et AB ≠ 0 alors il existe deux antidéplacements qui envoient le segment [AB] au segment [CD].

THÉORÈME

Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale

SYMÉTRIE GLISSANTE

THÉORÈME ET DÉFINITION

Soit f une symétrie glissante. Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que $f = t_{\vec{u}} o S_D = S_D o t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

Cette décomposition est appelée forme réduite de f. $\vec{u}$ et D sont les éléments caractéristiques de f.

PROPRIÉTÉS

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D. Soit M un point d'image M' par f.

a) *M*M' ∈D.* b) *Si M ∈D alors M' ∈D et $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.* c) $fof = t_{2\vec{u}}$

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE SYMÉTRIE GLISSANTE

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ.

1) *Soient A, B et C trois points. Si f(A) = B et f(B) = C alors $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et Δ = (IJ),*

*I = A*B et J = B*C.*

2) *Soient A, B et C trois points. I = A * B.*

Si f(A) = B et f(I) = C alors $\vec{u} = \overrightarrow{IC}$ et Δ = (IC).

3) *Soit ABCD un parallélogramme de centre I.*

Si f(A) = C et f(B) = D alors Δ est la perpendiculaire à (AB) issue de I et $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (CD) ***(à démontrer).***

Troisième partie

Similitudes

SIMILITUDES

I. HOMOTHÉTIES ET TRANSLATIONS

DÉFINITION
Soit I un point et k un réel non nul.
On appelle homothétie de centre I et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

THÉORÈME
Soit k un réel non nul et différent de 1. Une application f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

THÉORÈME
Toute homothétie conserve les mesures des angles

THÉORÈME
La composée de deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$, une translation si $k_1k_2 = 1$.

THÉORÈME
La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie de rapport k.

THÉORÈME
Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une homothétie de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = kz + b$. De plus, l'affixe z_A du centre A de l'homothétie f vérifie $z_A = \dfrac{b}{1-k}$

II. SIMILITUDES

DÉFINITION
Soit k un réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A' et B', $A'B' = kAB$.

THÉORÈME
La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.

THÉORÈME
Une application du plan dans lui-même est une similitude, si et seulement si, elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

THÉORÈME
Pour tous points A,B,C et D, d'images respectives A',B',C' et D' par une similitude de rapport k,
$\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

PROPRIÉTÉS

- *Une similitude de rapport k est une bijection et sa réciproque est une similitude de rapport* $\dfrac{1}{k}$
- *Une similitude conserve les angles géométriques*
- *Une similitude conserve l'orthogonalité*
- *Une similitude conserve l'alignement et le barycentre*
- *Une similitude transforme un segment en un segment*
- *Une similitude transforme une droite en une droite*
- *Une similitude transforme un cercle en un cercle et conserve le contact*
- *Une similitude conserve le parallélisme*
- *Soit A, B, C, D, E, F des points du plan A', B', C', D', E', F' leurs images respectives par une similitude*
  Si $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD} + b\overrightarrow{EF}$ *alors* $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'} + b\overrightarrow{E'F'}$

THÉORÈME

Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés sont égales

PROPRIÉTÉS

Soit f, g et h trois similitudes

- $(f o g)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$
- $f = g$, *si et seulement si,* $h \circ f = h \circ g$.

II. SIMILITUDES DIRECTES – SIMILITUDES INDIRECTES

DÉFINITION

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

CONSÉQUENCE

Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.
Toute similitude indirecte change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

THÉORÈME

- *La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.*
- *La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.*
- *La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.*
- *La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.*
- *La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.*

THÉORÈME

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ *et* $C \neq D$.
Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D
Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

III. SIMILITUDES DIRECTES

THÉORÈME ET DÉFINITION

Soit f une similitude directe et A, B, C et D des points tels que $AB \neq 0$ *et* $CD \neq 0$.
Soit A′, B′, C′ et D′ les images respectives de A, B, C et D. Alors $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.
En désignant par θ *une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)$, *on dit que f est une similitude directe d'angle* θ.

THÉORÈME

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ *et* θ'.
La similitude directe $f \circ g$ *est d'angle* $\theta + \theta'$.
La similitude directe f^{-1} *est d'angle* $-\theta$.

THÉORÈME

Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

CONSÉQUENCE

Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, son rapport et son angle.
Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
Une application f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$, *de centre I et d'angle* θ, *si et seulement si, pour tout point M distinct de I, d'image M′,* $IM' = k\, IM$ *et* $\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$

THÉORÈME

Toute similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ. Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

THÉORÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′.
L'application f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az+b$, avec $a = ke^{i\theta}$ et $z_1 = \dfrac{b}{1-a}$

THÉORÈME

Une similitude indirecte de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

THÉORÈME

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$ et h l'homothétie de centre 1 et de rapport k. Il existe une droite D telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f = h \circ S_D = S_D \circ h$, où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D.
Dans ce cas, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, où $M' = f(M)$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.
La droite D est appelée axe de la similitude indirecte f.

CONSÉQUENCE

Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f.
Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2.

PROPRIÉTÉ

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport différent de 1 et d'axe D.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $(\vec{u},\overrightarrow{IM'}) \equiv -(\vec{u},\overrightarrow{IM})[2\pi]$, pour tout M distinct de 1, d'image M′. La droite D porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MIM'}$.

THÉORÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′. L'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z}+b$.

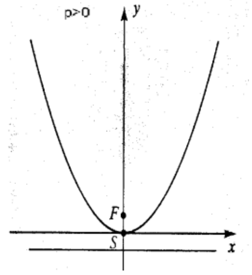
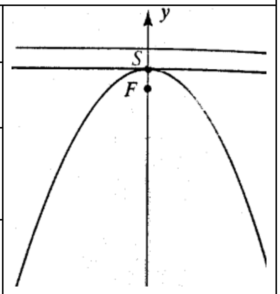
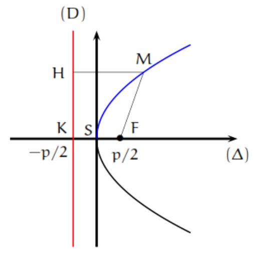
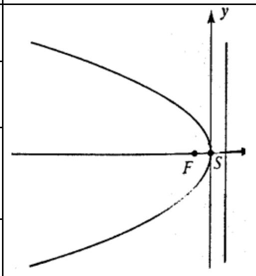
Dans ce cas $k = |a|$ et $z_1 = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ est l'affixe du point I.

Quatrième partie

Coniques

CONIQUES

1. PARABOLES

DÉFINITION :	*Soient F un point et D une droite ne passant pas par F. Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur D. On appelle parabole de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M tels que MF = MH.*			
EQUATION RÉDUITE :	$x^2 = 2py$, $p>0$	 $\vec{j} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$	$x^2 = -2py$, $p>0$	 $\vec{j} = \frac{-1}{SF}\overrightarrow{SF}$
AXE DE SYMÉTRIE	$(S, \vec{j})$		$(S, \vec{j})$	
FOYER	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$		$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$	
DIRECTRICE	$y = -\frac{p}{2}$		$y = \frac{p}{2}$	
TANGENTE	$xx_0 = p(y + y_0)$		$xx_0 = -p(y + y_0)$	
EQUATION RÉDUITE :	$y^2 = 2px$, $p>0$	 $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$	$y^2 = -2px$, $p>0$	 $\vec{i} = \frac{-1}{SF}\overrightarrow{SF}$
AXE DE SYMÉTRIE	$(S, \vec{i})$		$(S, \vec{i})$	
FOYER	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$		$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	
DIRECTRICE	$x = -\frac{p}{2}$		$x = \frac{p}{2}$	
TANGENTE	$yy_0 = p(x + x_0)$		$yy_0 = -p(x + x_0)$	

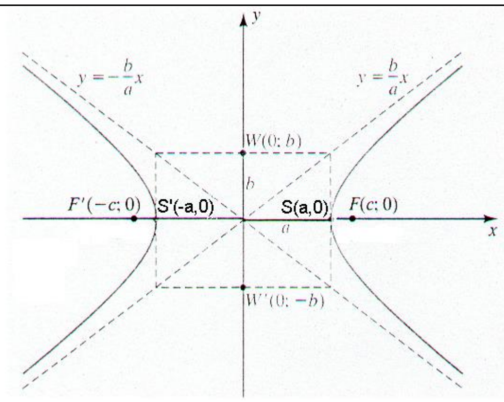
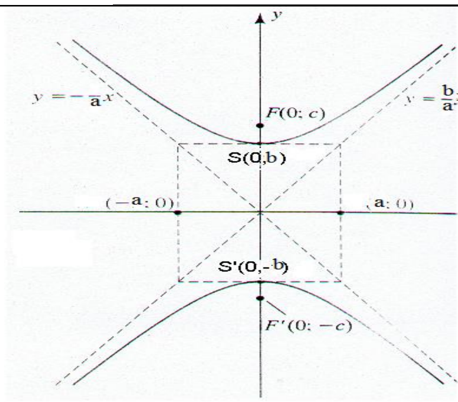
2. HYPERBOLES

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

$\mathscr{H}$ rencontre son axe focal en deux points A et A' appelés sommets et ils sont les barycentres respectifs des points pondérés (F, 1) , (K, e) et (F, 1), (K, -e) où K est le projeté orthogonal de F sur D.

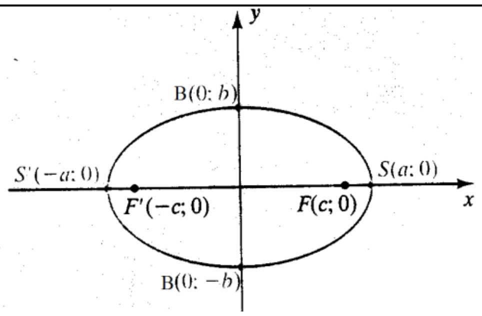
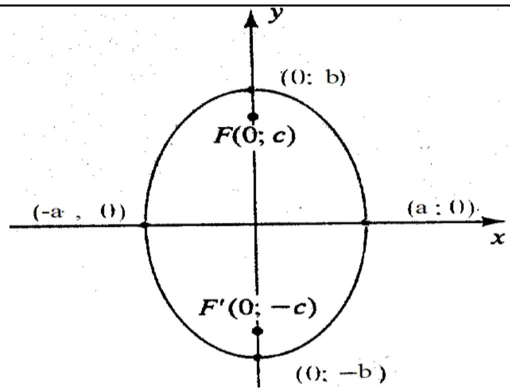
$$\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \text{ et } c = ea \text{ ou aussi } e = \frac{c}{a},$$
$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} \text{ et } OK = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

DÉFINITION :	*Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D. H est l'ensemble des pts M tels que* $\frac{MF}{MH} = e$, $e > 1$ *où H le projeté orthogonal de F sur D*	
EQUATION :	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
CENTRE	$(0,0)$	$(0,0)$
DISTANCE D'UN FOYER AU CENTRE :	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
EXCENTRICITÉ	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
AXE FOCAL OU GRAND AXE	(OX)	(OY)
SOMMETS	$(\pm a, 0)$ $\overrightarrow{SF} + e.\overrightarrow{SK} = \vec{0}$, $\overrightarrow{S'F} - e.\overrightarrow{S'K} = \vec{0}$	$(0, \pm b)$
FOYERS	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
DIRECTRICE	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$y = \pm\frac{b^2}{c}$

ASYMPTOTES	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
TANGENTE EN M(X0, Y0)	$\frac{x.x_0}{a^2}-\frac{y.y_0}{b^2}=1$	
	$\overrightarrow{OF}=e\overrightarrow{OA}$ et $c=ea$ ou aussi $e=\frac{c}{a}$, $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{e}\overrightarrow{OA}$ et $OK=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$.	
		
EQUATION :	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$	$-\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$
CENTRE :	$(x_1\ ,\ y_1)$	$(x_1\ ,\ y_1)$
AXE FOCAL OU GRAND AXE	$y=y_1$	$x=x_1$
SOMMETS	$(\ x_1\pm a\ ,\ y_1)$	$(x_1,\ y_1\pm a)$
FOYERS	$(x_1\pm c\ ,\ y_1)$	$(x_1\ ,\ y_1\pm c)$
ASYMPTOTES	$y-y_1=\pm\frac{b}{a}(x-x_1)$	

3.ELLIPSES

DÉFINITION :	*Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D. E est l'ensemble des points M tels que* $\frac{MF}{MH}=e,\ 0<e<1$ *où H le projeté orthogonal de F sur D*	
EQUATION RÉDUITE :	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad a>b>0$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,\ \ b>a>0$
CENTRE	$(0,0)$	$(0,0)$
FOYER :	$F(c,\ 0)$ avec $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$F(0,\ c)$ avec $c=\sqrt{b^2-a^2}$
EXCENTRICITÉ	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
DIRECTRICE ASSOCIÉE	$D:x=\frac{a^2}{c}$	$D:y=\frac{b^2}{c}$
AXE FOCAL	(OX)	(OY)
SOMMETS PRINCIPAUX	$(\ \pm a\ ,\ 0),\quad \vec{SF}+e.\vec{SK}=\vec{0}\ ,\ \vec{S'F}-e.\vec{S'K}=\vec{0}$	$(0,\ b)$ et $(0,\ -\ b)$
TANGENTE EN M(X0, Y0)	$\frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}=1$	

FIGURE		
EQUATION :	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$
CENTRE :	(x_1 , y_1)	(x_1 , y_1)
AXE FOCAL OU GRAND AXE	$y=y_1$	$x=x_1$
SOMMETS PRINCIPAUX	$(x_1 + a , y_1)$ et $(x_1 - a, y_1)$	$(x_1, y_1 \pm a)$ et $(x_1 \pm b, y_1)$
FOYERS	$(x_1 \pm c , y_1)$	$(x_1 , y_1 \pm c)$

RETENONS

Soit $\Gamma : Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

- *Si* $\boldsymbol{AB = 0}$ *alors* Γ *est une parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou le vide.*
- *Si* $\boldsymbol{AB < 0}$ *alors* Γ *est une hyperbole ou deux droites sécantes.*
- *Si* $\boldsymbol{AB > 0}$ *alors* Γ *est une ellipse ou un cercle ou le vide.*

Cinquième partie

Géométrie dans l'espace

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

DÉFINITION

Soit A, B et C des points. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ *si* $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ *ou* $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}$ *si* $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ *et* $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$

THÉORÈME

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$\vec{u}\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Pour tous points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$

$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réels α et β.

$\vec{u}\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$, $\vec{u}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$

$\left(\alpha\vec{u}\right)\vec{v}=\vec{u}\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha\left(\vec{u}\vec{v}\right)$, $\left(\alpha\vec{u}\right)\left(\beta\vec{v}\right)=\alpha\beta\left(\vec{u}\vec{v}\right)$

II. PRODUIT VECTORIEL

DÉFINITION

Soit A, B et C des points de l'espace.

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et défini par :

- *Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires alors* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
- *Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors :*
  - $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$*
  - $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ *est une base directe.*
  - $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right)$

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réels α et β.

- $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{o}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$ *si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$,

  $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)$,

  $\alpha\vec{u}\wedge\beta\vec{v}=\alpha\beta\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$

COMPOSANTES DU PRODUIT VECTORIEL

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour tout vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\text{ et }\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\text{ on a : }\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b&b'\\c&c'\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a&a'\\c&c'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a&a'\\b&b'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}$

$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}=\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right).\vec{u}=\left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right).\vec{v}=\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME

L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$

AIRE D'UN TRIANGLE

L'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE ABCD, VOLUME D'UN PARALLÉLIPIPÈDE

Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à $\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\right|$

II. EQUATIONS D'UNE DROITE, D'UN PLAN ET D'UNE SPHÈRE.

DROITE

Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble D des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k est un réel est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

SPHÈRE

Soit A un point et R un réel strictement positif. La sphère S de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que

PLAN

Soit A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
L'ensemble P des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des réels est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$P = \left\{M;\ \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0\right\}$$

DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. La distance de A au plan P est égale à :

$$d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

THÉORÈME

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit S la sphère de centre A et de rayon R. Soit un plan P et H le projeté orthogonal de A sur P.
$S \cap P = \emptyset$ si $d(A,P) > R$
$S \cap P = \{H\}$ si $d(A,P) = R$
$S \cap P$ est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d(A,P)^2}$ si $d(A,P) < R$

DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D.

La distance d'un point M de l'espace à la droite D est : $d(M, D) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

IV-TRANSLATION

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui a tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$.

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

PROPRIÉTÉS

Toute translation conserve : les distances, le produit scalaire, les milieux, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.

THÉORÈME

L'image par une translation t :

- *D'une droite est une droite qui lui est parallèle.*
- *D'un plan est un plan qui lui est parallèle.*

PYRAMIDE RÉGULIÈRE

Une pyramide IABCD de sommet I est dite régulière si, sa base ABCD est un carré et le projeté orthogonal de I sur le plan (ABCD) est le centre du carré ABCD.

EXPRESSION ANALYTIQUE D'UNE TRANSLATION

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *un vecteur de l'espace.*

Si M(x, y, z) est un point de l'espace et M′(x′, y′, z′) est son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ *alors* $\begin{cases}x' = x+a\\ y' = y+b\\ z' = z+c\end{cases}$

L'application qui à tout point M(x, y, z) associe le point M′(x′, y′, z′) est tel que $\begin{cases}x' = x+a\\ y' = y+b\\ z' = z+c\end{cases}$ *est la translation de vecteur* $\vec{u}$

IV-HOMOTHÉTIE DE L'ESPACE

DÉFINITION

Soit I un point de l'espace et k un réel non nul.

L'application qui à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ *est appelée homothétie de centre I et de rapport k , elle est notée* $h_{(I,k)}$

Pour tous points M et M′de l'espace $h_{(I,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

THÉORÈME

- *Toute homothétie de centre I et de rapport non nul k est une bijection de l'espace et sa réciproque est une homothétie de centre I et de rapport* $\frac{1}{k}$.
- *Soit h une homothétie. Pour tous points M et N d'images respectives M′ et N′ par h on a :* $M'N' = |k|MN$

PROPRIÉTÉS

Toute homothétie conserve :

- *Les milieux, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.*
- *Le contact.*

THÉORÈME

L'image par une homothétie h de rapport k:

- *D'une droite est une droite qui lui est parallèle.*
- *D'un plan est un plan qui lui est parallèle.*

EXPRESSION ANALYTIQUE D'UNE HOMOTHÉTIE

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- *Soit h l'homothétie de centre I(a, b, c) et de rapport non nul k.*

Si M(x, y, z) est un point de l'espace et M′(x′, y′, z′) est son image par h alors

$$\begin{cases}x' = k(x-a)+a\\ y' = k(y-b)+b\\ z' = k(z-c)+c\end{cases}$$

- *L'application qui à tout point M(x, y, z) associe le point M′(x′, y′ , z′) tel que*

$\begin{cases}x' = kx+\alpha\\ y' = ky+\beta\\ z' = kz+\gamma\end{cases}$, $k \neq 1$ *est l'homothétie de centre* $I\left(\frac{\alpha}{1-k},\frac{\beta}{1-k},\frac{\gamma}{1-k}\right)$ *et de rapport k.*

Sixième partie

Arithmétiques

ARITHMETIQUES

A DIVISIBILITÉ DANS Z

I°) DIVISEURS ET MULTIPLES D'UN ENTIER

DÉFINITION Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.

* On dit que b divise a s'il existe un entier relatif q tel que : $a = bq$. On note $b \mid a$

* On dit également que a est un multiple de b ou que b est un **diviseur** de a.

REMARQUE : si a n'est pas un multiple de b alors b ne divise pas a.

CONSÉQUENCES

- Tout entier a est divisible par 1 et − 1.
- Soit a un entier non nul. Si a divise 1 alors a = 1 ou a = − 1.
- Soit a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Si b divise a alors $\forall k \in Z$ et $\forall n \in IN^*$, b divise ak et b divise a^n.

PROPRIÉTÉS

Soient a , b et c trois entiers.

- Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = \pm b$.
- Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.
- Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors $c \mid (au + bv)$ quels que soient u et v entiers relatifs.

  On dit que c divise toute combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers.

II°) DIVISION EUCLIDIENNE DANS Z

THÉORÈME

Soient $a \in Z$ et $b \in Z^*$ Il existe un unique couple (q , r) d'entiers relatifs tels que :

$a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

q est le quotient et r est le reste

DÉTERMINATION DU QUOTIENT :

Si $b > 0$ alors $q = E\left(\frac{a}{b}\right)$ et Si $b < 0$ alors $q = -E\left(-\frac{a}{b}\right)$

III°) CONGRUENCE MODULO n

DÉFINITION Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

On dit que « a est congru à b modulo n » ou que « a et b sont congrus modulo n » si :

a − b est un multiple de n.

On note $a \equiv b \pmod{n}$

CONSÉQUENCE soient a et b deux entiers relatifs et n entier naturel non nul.

- $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n$ divise $a - b$.
- $a \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow n$ divise a
- Soit d un entier naturel non nul. Si $a \equiv b \pmod{n}$ et d divise $n \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

THÉORÈME

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier a, il existe un unique entier r appartient à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $a \equiv r \pmod{n}$.

On dit que r est le reste modulo n de a.

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

soient a entier relatif et n entier naturel non nul, .

Si $a \equiv r \pmod{n}$ et $0 \le r < n$ alors r est le reste dans la division euclidienne de a par n.

CONSÉQUENCE

Soit n un entier naturel non nul.

Deux entiers sont congrus modulo n, si et seulement si, ils ont le même reste modulo n.

PROPRIÉTÉS

Soient a, b et c trois entiers et n un entier naturel non nul.

$a \equiv a \pmod{n}$, $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$ Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}$ alors $a \equiv c \pmod{n}$

PROPRIÉTÉS

Soient a, b, a' et b' quatre entiers relatifs et n entier naturel non nul.

La **congruence** est compatible avec l'addition.

1. Si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors : $a + a' \equiv b + b'[n]$.

CONSÉQUENCE

2. Quel que soit $c \in \mathbb{Z}$: si $a \equiv b\ [n]$ alors : $a + c \equiv b + c\ [n]$.

La congruence est compatible avec la multiplication.

3. Si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors : $a \times a' \equiv b \times b'[n]$.

CONSÉQUENCE

4. Quel que soit k entier naturel non nul : si $a \equiv b\ [n]$ alors : $a^k \equiv b^k\ [n]$.

5. Quel que soit $c \in \mathbb{Z}$: si $a \equiv b\ [n]$ alors : $a \times c \equiv b \times c\ [n]$.

En particulier : si $a \equiv b\ [n]$ alors : $(-a) \equiv (-b)\ [n]$.

CONSÉQUENCE

6. Si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors : $a - a' \equiv b - b'[n]$.

mais attention :

$\cancel{ka \equiv kb\ [n] \Rightarrow a \equiv b\ [n]}$

(Sauf si k et n sont premiers entre eux)

$\cancel{\text{Si } a \equiv b\ [n] \text{ et } a' \equiv b'[n] \text{ alors : } \frac{a}{a'} \equiv \frac{b}{b'}}\ [n]$.

La congruence n'est pas compatible avec la division !

PETIT THÉORÈME DE FERMAT :

Pour tout entier naturel a et pour tout nombre premier p <u>ne divisant pas a</u>. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

REMARQUE :

Si p est premier alors « a est premier avec p » si et seulement si « p ne divise pas a ».

COROLLAIRE du petit théorème de Fermat :

Soit p un nombre premier, quel que soit a entier naturel : $a^p \equiv a \pmod{p}$

B IDENTITÉ DE BEZOUT

I°) PGCD DE DEUX ENTIERS

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Notons D(a) l'ensemble des diviseurs de a et D(b) celui des diviseurs de b.

L'ensemble de leurs diviseurs communs est noté : D(a,b) , D(a,b) = D(a) $\cap$ D(b)

1 divise a et b donc D(a,b) n'est pas vide.

De plus, a et b admettant un nombre fini de diviseurs, leurs diviseurs communs sont en nombre fini.

D(a,b) étant un sous ensemble fini et non vide de IN, il admet donc un plus grand élément d.

DÉFINITION DU PGCD DE DEUX ENTIERS NATURELS NON NULS :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls,

On appelle plus grand commun diviseurs de a et b l'entier naturel noté d = pgcd (a, b) ou $d = a \wedge b$ tel que :

- d divise a et b.
- Tout diviseur commun à a et b est un diviseur de d.

REMARQUE :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- Si a = bq + r avec q et r entiers naturels non nuls alors **pgcd** (a, b) = **pgcd** (b, r)
- si $b \mid a$ alors **pgcd** (a, b) = b
- $a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide de a par b

DÉFINITION

Si a et b sont deux entiers non nuls alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deux conditions suivantes :

- D divise a et b
- Si un entier k divise a et b alors il divise d.

  L'entier d est appelé plus grand commun diviseurs de a et b et noté d = $a \wedge b$ ou d = pgcd(a , b).

CONSÉQUENCE

- Pour tous entiers non nuls a et b, $a \wedge b$ est un entier naturel non nul.
- Pour tous entiers non nuls a et b, pgcd (a, b) = pgcd (b, a)
- Si a et b sont des entiers relatifs non nuls : $p\,gcd(a,b) = p\,gcd(|a|,|b|)$

PROPRIÉTÉS

Soient a et b deux entiers non nuls

- Si $b \mid a$ alors **pgcd** (a, b) = $|b|$.
- Si a = bq + r avec q et r entiers naturels non nuls alors **pgcd** (a, b) = **pgcd** (b, r).
- $a \wedge b = b \wedge a$
- Pour tout entier non nul k, $(ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$
- Pour tout entier non nul c, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

CONSÉQUENCE

Quel que soit k, entier naturel non nul : si pgcd (a, b) = 1 alors pgcd (ka, kb) = k

II NOMBRES PREMIERS

DÉFINITION : Soit p un entier naturel. On dit que p est un nombre premier s'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts. Diviseurs qui sont 1 et lui-même.

(puisque 1 divise tout nombre et tout nombre est diviseur de lui-même.)

REMARQUE : A ce jour, il n'existe toujours pas de critère ou de formule qui permette instantanément de dire si un nombre quelconque est premier.

THÉORÈME N°1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ Si $n \geq 2$ alors n admet au moins un diviseur premier.

THÉORÈME N°2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec **$n \geq 2$.**

Si n n'est pas premier alors n admet au moins un diviseur premier p tel que : $p \leq \sqrt{n}$

THÉORÈME N°3 (contraposée du théorème n° 2) :

Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ alors n est premier.

THÉORÈME N°4 L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

THÉORÈME N°5 :

Tout entier **$n \geq 2$** se décompose de façon unique sous la forme : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$

Où : **p_1 , p_2 , … p_m** sont des nombres premiers tels que : **$p_1 < p_2 < \ldots < p_m$**

et α_1, α_2, … , α_m sont des entiers naturels non nuls.

L'écriture de n sous cette forme est appelée décomposition de n en produit de facteurs premiers.

III NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

DÉFINITION Soient a et b deux entiers relatifs non tous nuls.

a et b sont dits premiers entre eux si **pgcd (a, b) = 1.**

REMARQUES :

1) deux nombres premiers entre eux ont donc 1 pour seul diviseur positif commun.

2) si a est un nombre premier et que a ne divise pas b alors a et b sont premiers entre eux.

THÉORÈME Soient a et b deux entiers non nuls.

pgcd (a, b) = d $\Leftrightarrow$ il existe a' et b' entiers tels que : a = da' et b = db' avec pgcd (a', b') = 1

<u>LEMME DE GAUSS</u> : soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et a et b premiers entre eux alors a divise c.

THÉORÈME Soient a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier.

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} a \wedge b = 1 \\ n \equiv 0 \pmod{a} \\ n \equiv 0 \pmod{b} \end{array}\right\} \text{ alors } n \equiv 0 \pmod{ab}$$

CONSÉQUENCE

Soient n et m deux entiers naturels non nuls et **<u>premiers entre eux</u>**. x et x_0 deux entiers.

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x_0 \pmod{n} \\ x \equiv x_0 \pmod{m} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \equiv x_0 \pmod{m.n}$$

IV PPCM DE DEUX ENTIERS

THÉORÈME ET DÉFINITION :

Pour tous entiers non nuls a et b, il existe un unique entier naturel non nul M qui vérifie les deux conditions suivantes :

- M est un multiple de a et de b
- Tout multiple de commun de a et b est un multiple de m.

  L'entier M ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b et est noté $a \vee b$

CONSÉQUENCES

- $a \vee b = |a| \vee |b|$
- $a \vee b = d.|a'.b'|$ tels que $d = a \wedge b$, $a = a'.d$ et $b = b'.d$
- $(a \vee b)(a \wedge b) = |a.b|$

PROPRIÉTÉS

Soient a et b deux entiers non nuls.

- Si b divise a alors $a \vee b = |a|$
- Pour tout entier non nul k, $(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$
- Pour tout entier non nul c, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

THÉORÈME

Soient a et b deux entiers non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.

Il existe un unique entier non nul u appartenant à $\{1,\dots, b-1\}$ tel que $au \equiv 1 (\mathrm{mod}\, b)$.

On dit que u est un inverse de a modulo b.

EXEMPLE 3 est un inverse de 5 modulo 7.

V IDENTITÉ DE BEZOUT

THÉORÈME DE BEZOUT

Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

APPLICATIONS

Soient a, b et c trois entiers non nuls. Montrer que

a) Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge (bc) = 1$

b) Si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^2 = 1$

c) Pour tout entier naturel n, Si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^n = 1$

COROLLAIRE

Si a et b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$ alors il existe deux entiers u et v tels que $d = au + bv$.

Attention : La réciproque n'est pas vraie.

VI EQUATIONS DIOPHANTIENNES

DÉFINITION :

Toute équation (E) du type : $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs et où les inconnues x et y sont des entiers relatifs est appelée **équation diophantienne**.

THÉORÈME Soient a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$.

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans Z^2 si et seulement si, d divise c.

EQUATIONS DIOPHANTIENNES : EXISTENCE DE SOLUTIONS

<u>Étape n° 1</u> : A quelle condition (E) admet-elle au moins une solution ?

L' équation (E) : $ax + by = c$ admet au moins une solution si et seulement si $a \wedge b$ divise c.

REMARQUE S :

1) La première chose à faire est évidemment de calculer le PGCD de a et de b.

2) Si a et b sont premiers entre eux, (E) admet des solutions quel que soit c.

<u>Étape n° 2</u> : Recherche d'une solution particulière.

Trois cas de figure sont possibles :

- Soit la solution particulière est donnée par le texte et il ne reste qu'à vérifier qu'elle est bien solution de (E).
- Soit il y a une solution particulière évidente.
- Soit il faut trouver cette solution par le calcul.

Prenons un exemple concret : (E) : $616x + 585y = 12$

<u>Première méthode</u>

$616 = 585 \times 1 + 31$

$585 = 31 \times 18 + 27$

$31 = 27 \times 1 + 4$

$27 = 4 \times 6 + 3$

$4 = 3 \times 1 + 1$

$3 = 1 \times 3 + 0$

Le dernier reste non nul est 1 donc **pgcd (616,585) = 1**

1 divise 12 donc ce qui est certain c'est que l'équation a des solutions.

Voici maintenant la technique à adopter pour remonter la suite de divisions.

(E) : $616x + 585y = 12$

$$\boxed{\begin{aligned} 616 &= 585 \times 1 + 31 \leftarrow \\ 585 &= 31 \times 18 + 27 \\ 31 &= 27 \times 1 + 4 \\ 27 &= 4 \times 6 + 3 \\ 4 &= 3 \times 1 + 1 \end{aligned}}$$

Exprimer le PGCD : $1 = 4 - 3 \times 1$

Remplacer le reste précédent : $1 = 4 - (27 - 4 \times 6) \times 1$

Factoriser : $1 = 4 \times 7 - 27 \times 1$

Remplacer le reste précédent : $1 = (31 - 27 \times 1) \times 7 - 27 \times 1$

Factoriser : $1 = 31 \times 7 - 27 \times 8$

Remplacer le reste précédent : $1 = 31 \times 7 - (585 - 31 \times 18) \times 8$

Factoriser : $1 = 31 \times 151 - 585 \times 8$

Remplacer le reste précédent : $1 = (616 - 585 \times 1) \times 151 - 585 \times 8$

Factoriser : $1 = 616 \times 151 + 585 \times (-159)$

Multiplier par 12 : $12 = 616 \times 1812 + 585 \times (-1908)$

Et vue la probabilité de se tromper dans ce genre de manipulation, il est conseillé de vérifier le résultat trouvé :

En effet, la calculatrice confirme que : $616 \times 1812 + 585 \times (-1908) = 12$

Une solution particulière de (E) est donc le couple (1812 ; −1908)

<u>Deuxième méthode</u>

	1	18	1	6	1	3
0 1	1	19	20	139	159	616
1 0	1	18	19	132	151	585

$616 \times 151 - 585 \times 159 = 1$

$616 \times (151 \times 12) + 585 \times (-159 \times 12) = 12.$