

<b>1. Exercices de base</b>	<b>2</b>	4. 55. Divisibilité + espace, La Réunion 2009	16
1. 1. Division Euclidienne - 1 (c)	2	4. 56. Divisibilité par 7, France 2009	16
1. 2. Division Euclidienne-2	2	4. 57. Bézout+espace, Centres étrangers 2009	17
1. 3. Division Euclidienne-3 (c)	2	4. 58. Restes chinois, Asie 2009	18
1. 4. Multiples - 1	2	4. 59. QCM, Antilles 2009	18
1. 5. PGCD - 1 (c)	2	4. 60. Th. de Wilson, Am du Nord 2009	18
1. 6. PPCM et PGCD - 2	3	4. 61. ROC+Base 12, N. Calédonie, mars 2008 (c)	19
1. 7. PPCM et PGCD - 3	3	4. 62. QCM, Polynésie, juin 2008	20
1. 8. Théorème de Gauss-1	3	4. 63. QCM, Liban, juin 2008	21
1. 9. Bases de numération-1	3	4. 64. Réseau, Asie, juin 2008	22
1. 10. Bases de numération-2	3	4. 65. Codage affine, Antilles, juin 2008	23
1. 11. Bases de numération-3	3	4. 66. Surface+Eq. dioph., Am Nord, juin 2008 (c)	23
1. 12. Ecriture répétée	3	4. 67. Bézout+Fermat, National, sept 2007	24
1. 13. Congruences-1 (c)	3	4. 68. Bézout, N. Calédonie, mars 2007	25
1. 14. Congruences-2	4	4. 69. Codage affine, N. Calédonie, mars 2007	25
1. 15. Congruences-3 (c)	4	4. 70. Surface+éq. dioph., Polynésie juin 2007	26
1. 16. Divers-1	4	4. 71. QCM, Liban juin 2007	27
1. 17. Divers-2	4	4. 72. Bézout, National septembre 2006	27
1. 18. Divers-3	4	4. 73. ROC+Congruences, Am. du Sud nov. 2006 (c)	28
1. 19. Divers-4	4	4. 74. QCM, Polynésie, juin 2006 (c)	29
1. 20. Divers-5 (QCM) (c)	4	4. 75. Restes chinois, National, juin 2006 (c)	30
1. 21. Nombres Premiers-1	5	4. 76. Fermat, Centres étrangers, juin 2006	31
1. 22. Nombres Premiers-2	5	4. 77. Eq. diophantienne, Asie, juin 2006	31
1. 23. Nombres Premiers-3	5	4. 78. Similitude & suite, Am. du Sud, sept. 2005	32
1. 24. Démonstration de Fermat	5	4. 79. QCM, National, sept. 2005	32
1. 25. La classe...	5	4. 80. Restes de puissances, Antilles, juin 2005	33
1. 26. Un	6	4. 81. Eq. dioph., Centres étrangers, juin 2005 (c)	34
<b>2. Bézout</b>	<b>6</b>	4. 82. Bézout+Fermat, Liban, juin 2005	35
2. 27. Bezout-1	6	4. 83. Suite de restes, Polynésie, juin 2005 (c)	36
2. 28. Bezout-2	6	4. 84. PGCD dans suite, La Réunion, juin 2005	36
2. 29. Bezout-3	6	4. 85. Fibonacci, N. Calédonie, nov 2004 (c)	37
2. 30. Bezout-4	6	4. 86. QCM, Antilles, sept 2004 (c)	38
2. 31. Bezout-5	7	4. 87. Congruences, Asie, juin 2004	38
<b>3. Anciens exos bac</b>	<b>7</b>	4. 88. Repunit, Centres étrangers, juin 2004	39
3. 32. Somme et produit	7	4. 89. Fermat et Bézout, National, juin 2004 (c)	39
3. 33. Quadratique	7	4. 90. Fermat, La Réunion, juin 2004	40
3. 34. Divisibilité	7	4. 91. Restes chinois + plan, N. Calédonie, sept 2003	41
3. 35. Equation diophantienne	7	4. 92. Eq. dioph., Antilles, sept 2003	41
3. 36. Base de numération 1	7	4. 93. Bézout, France, sept 2003	41
3. 37. Base de numération 2	8	4. 94. Congruences, Polynésie, sept 2003	41
3. 38. Somme des cubes	8	4. 95. Suite, Antilles, juin 2003 (c)	42
3. 39. Somme des diviseurs	8	4. 96. PGCD, Asie, juin 2003	43
3. 40. Racines rationnelles (méthode de Descartes)	9	4. 97. Congruences, Liban, mai 2003	43
3. 41. QCM, Banque exercices 2004 - 29	9	4. 98. Repunit, Am. du Sud, décembre 2002	43
3. 42. Cryptographie, Banque exercices 2004 - 30	9	4. 99. Eq. dioph., N. Calédonie, nov. 2002	44
3. 43. Repunits 1, Banque exercices 2004 - 31	10	4. 100. Bézout+rotation, France, sept. 2002	44
3. 44. Repunits 2, Banque exercices 2004 - 32	10	4. 101. Bézout & suites, Asie, juin 2002	45
3. 45. Recherche, Banque exercices 2005 - 26	11	4. 102. Triplets pythag., C. étrangers, juin 2002	45
3. 46. Cryptographie, Banque exercices 2005 - 38	11	4. 103. Bézout, France, juin 2002	45
<b>4. Exercices Baccalauréat</b>	<b>12</b>	4. 104. PGCD, Polynésie, juin 2002	46
4. 47. Puissances de 7, Polynésie 2010	12	4. 105. Calendrier, Am. du Nord, mai 2002	46
4. 48. QCM, Liban 2010	12	4. 106. Divisibilité, N. Calédonie, déc. 2001	47
4. 49. Bézout+spirale, Amérique du Nord 2010	12	4. 107. PGCD & PPCM, Antilles, sept 2001	47
4. 50. Carrés et cubes+espace, Pondicherry, 2010	14	4. 108. PGCD, Am. du Sud, sept 2001	47
4. 51. Surface+équation, Antilles Guyane 2009	14	4. 109. Similitude & Bézout, France, juin 2001	47
4. 52. Equation diophantienne, N. Calédonie, 2009	15	4. 110. Calendrier, C. étrangers, juin 2001	48
4. 53. Puissance de 2, France & La Réunion, 2009	15	4. 111. Bézout, Antilles, juin 2001	48
4. 54. Puissances de 3, Liban 2009	16	4. 112. Bézout, Am. du Nord, juin 2001	49
		4. 113. Repunit, Pondicherry, juin 2001 (c)	49

4. 114. PGCD & PPCM, N. Calédonie, juin 2001	50	4. 126. Bézout, Asie, juin 1999	57
4. 115. Bézout, Polynésie, juin 2001 (c)	50	4. 127. Bézout, Antilles - Guyane, juin 1999	57
4. 116. Bézout & rotation, Antilles, juin 2000	51	4. 128. Th. de Wilson, Am. du Nord, juin 1999	58
4. 117. PGCD, La Réunion, juin 2000	51	4. 129. Premiers, France, juin 1999	58
4. 118. Bézout, Polynésie, juin 2000	51	4. 130. Congruences, Polynésie, juin 1999	58
4. 119. Bézout et plans, Asie juin 2000	52	4. 131. Eq. dioph., Pondicherry, mai 1999 (c)	59
4. 120. Homothétie & multiples, Liban, mai 2000 (c)	52	4. 132. Diviseurs+pgcd, Bac C, Lyon, 1981	60
4. 121. Congruences, Pondicherry, mai 2000 (c)	54	4. 133. Bézout + ppcm, Bac C, Japon 1980	60
4. 122. PGCD & parité, N. Calédonie, déc. 1999	55	4. 134. Base et diviseurs, Bac C, Inde, 1979	60
4. 123. Bases, Am. du Sud, nov. 1999	55	4. 135. Bases+congruences, Bac C, Aix, 1976	60
4. 124. Bézout, Liban, juin 1999 (c)	55	4. 136. Nombres de Farey et approximation d'un rationnel par un rationnel	61
4. 125. Bézout & plan, C. étrangers, juin 1999	57		

## 1. Exercices de base

### 1. 1. Division Euclidienne - 1 (c)

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

#### Correction

On a  $320 = q \times b + 39 \Leftrightarrow q \times b = 320 - 39 = 281$ . Cherchons les diviseurs de  $281 : 1$  et  $281$ . Ce sont les seules valeurs possibles de  $q$  et  $b$ .

### 1. 2. Division Euclidienne-2

Quel est le nombre de diviseurs de 2880 ?

### 1. 3. Division Euclidienne-3 (c)

- Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.
- Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n - 4$  divise 6.
- Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n - 4$  divise  $n + 2$ .
- Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n + 1$  divise  $3n - 4$ .

#### Correction

- L'ensemble des diviseurs de 6 est  $D = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$ .
- $n - 4$  divise 6 si  $n - 4$  appartient à  $D$ , soit si  $n$  appartient à  $D + 4 = \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$ .
- On peut remarquer que  $n + 2 = n - 4 + 6$ . Puisqu'il est évident que  $n - 4$  divise  $n - 4$ , le résultat du 2. permet alors d'affirmer que si  $n - 4$  divise  $n + 2$ , alors  $n - 4$  divise  $n + 2 - (n - 4)$  c'est-à-dire  $n - 4$  divise 6.

Réciproquement si  $n - 4$  divise 6 alors  $n - 4$  divise  $6 + n - 4$  c'est-à-dire  $n - 4$  divise  $n + 2$ . On a donc démontré que  $n - 4$  divise  $n + 2$  si et seulement si  $n - 4$  divise 6.

- On peut raisonner en utilisant le même principe qu'à la question précédente. On remarque que

$$3n - 4 = 3(n + 1) - 7,$$

et puisqu'il est immédiat que  $n + 1$  divise  $3(n + 1)$ , on peut écrire :

- si  $n + 1$  divise  $3n - 4$ , alors  $n + 1$  divise  $3n - 4 - 3(n + 1)$  c'est-à-dire  $n + 1$  divise  $-7$  ;

réciproquement : si  $n + 1$  divise  $-7$  alors  $n + 1$  divise  $-7 + 3(n + 1)$  c'est-à-dire  $n + 1$  divise  $3n - 4$ .

L'ensemble des diviseurs de  $-7$  (ou de 7) étant  $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$ , on en déduit que  $n + 1$  divise  $3n - 4$  si et seulement si  $n + 1$  appartient à  $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$  soit  $n$  appartient à  $\{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$ .

### 1. 4. Multiples - 1

$a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs. Démontrez que si  $a^2 + b^2$  est divisible par 7 alors  $a$  et  $b$  sont divisibles par 7.

### 1. 5. PGCD - 1 (c)

Trouvez le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.

#### Correction

Avec l'aide de Maple on a immédiatement :

> ifactor(1640); ifactor(492);

(2)<sup>3</sup> (5) (41)

(2)<sup>2</sup> (3) (41)

et le PGCD :  $2^2 \cdot 41 = 164$ . Avec Euclide :  $1640 = 492 \times 3 + 164$  donc...  
 $492 = 164 \times 3 + 0$

### 1. 6. PPCM et PGCD - 2

Trouvez les deux nombres  $a$  et  $b$  sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.

### 1. 7. PPCM et PGCD - 3

Trouvez deux entiers dont la différence entre leur PPCM et leur PGCD est 187.

### 1. 8. Théorème de Gauss-1

1.  $a$  est un entier naturel. Montrez que  $a^5 - a$  est divisible par 10.

2.  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels avec  $a \geq b$ . Démontrez que si  $a^5 - b^5$  est divisible par 10 alors  $a^2 - b^2$  est divisible par 20.

### 1. 9. Bases de numération-1

Trouvez toutes les valeurs des chiffres  $x$  et  $y$  telles que le nombre  $n = \overline{26x95y}$  dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

### 1. 10. Bases de numération-2

$A$  est le nombre qui s'écrit 16524 dans le système à base 7. Ecrivez ce nombre en bases 10, puis 2 et enfin 16 (tous les calculs doivent apparaître).

### 1. 11. Bases de numération-3

Le nombre  $N$  s'écrit 23 dans le système décimal. Peut-il s'écrire 27 dans une autre base ?

### 1. 12. Ecriture répétée

Soit  $n$  un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal  $n = \overline{abcabc}$  avec  $a \neq 0$ .

1. a. Déterminer  $n$  tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

\*  $n$  est divisible par 5,

\* L'entier  $\overline{bc}$  est le double de  $a$ .

b. Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2. Etude du cas général

a. Montrer que  $n$  est divisible par  $\overline{abc}$ . En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

b. Montrer que  $n$  ne peut pas être un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier naturel).

3. Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4. On pose  $n_1 = 121121$  et  $n_2 = 140140$ . On appelle (E) l'équation  $n_1x + n_2y = 1001$  d'inconnues les entiers relatifs  $x$  et  $y$ .

a. Déterminer une solution particulière de (E)

b. Résoudre (E) dans  $Z^2$ .

### 1. 13. Congruences-1 (c)

Quel est le reste de la division par 7 du nombre  $(32)^{45}$

#### **Correction**

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ;  $4^2$  donne 2,  $4^3$  donne 8, soit 1 ; comme  $45 = 15 \cdot 3$ , on a :

$$32^{45} \equiv 4^{45} (7) \equiv (4^3)^{15} (7) \equiv (1)^{15} (7) \equiv 1(7).$$

Le reste est donc 1.

### 1. 14. Congruences-2

Démontrez que le nombre  $n = ab(a^2 - b^2)$  est divisible par 3 pour tous les entiers relatifs  $a$  et  $b$ .

### 1. 15. Congruences-3 (c)

1. Déterminer les restes de la division de  $5^p$  par 13 pour  $p$  entier naturel.

2. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, le nombre  $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$  est divisible par 13.

#### **Correction**

1.  $p = 0 : 1, p = 1 : 5, p = 2 : -1$  ou 12,  $p = 3 : -5$  ou 8,  $p = 4 : 1$  donc

pour  $p = 4k$  le reste est 1,

pour  $p = 4k + 1$  le reste est 5,

pour  $p = 4k + 2$  le reste est 12 ou -1,

pour  $p = 4k + 3$  le reste est 8 ou -5.

2.  $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} : 31 = 2 \times 13 + 5 \equiv 5(13)$  et  $18 = 13 \times 1 + 5 \equiv 5(13)$  ; on a donc

$$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv [5^{4n+1} + 5^{4n-1}](13) \equiv [5^{4n+1} + 5^{4n+3}](13) \equiv [5+8](13) \equiv 0(13).$$

### 1. 16. Divers-1

Un nombre qui s'écrit avec 4 chiffres identiques peut-il être un carré parfait (carré d'un nombre entier) ?

### 1. 17. Divers-2

Démontrez qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut être égal à la somme de trois carrés.

### 1. 18. Divers-3

$a$  et  $b$  sont deux entiers positifs premiers entre eux. Montrez que  $a + b$  et  $a - b$  sont premiers entre eux.

### 1. 19. Divers-4

On considère la fraction  $\frac{n^3 + n}{2n + 1}$  avec  $n$  entier positif.

a. prouvez que tout diviseur commun  $d$  à  $2n + 1$  et  $n^3 + n$  est premier avec  $n$ .

b. Déduisez en que  $d$  divise  $n^2 + 1$ , puis que  $d = 1$  ou  $d = 5$ .

c. Quelles sont les valeurs de  $n$  pour lesquelles la fraction est irréductible ?

### 1. 20. Divers-5 (QCM) (c)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

**Proposition 1** : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x ; y)$  solutions de l'équation  $12x - 5y = 3$  est l'ensemble des couples  $(4 + 10k ; 9 + 24k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  ».

**Proposition 2** : Pour tout entier naturel  $n$  non nul : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 5 ».

**Proposition 3** : Pour tout entier naturel  $n$  non nul : « Si un entier naturel  $n$  est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de  $3n + 4$  et de  $4n + 3$  est égal à 7 ».

**Proposition 4** : «  $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$  si et seulement si  $x \equiv 1[5]$  ».

**Proposition 5** : Deux entiers naturels  $M$  et  $N$  sont tels que  $M$  a pour écriture  $abc$  en base dix ( $M$  vaut  $100a+10b+c$  où  $a, b, c$  sont des chiffres entre 0 et 9) et  $N$  a pour écriture  $bca$  en base dix.

« Si l'entier  $M$  est divisible par 27 alors l'entier  $M - N$  est aussi divisible par 27 ».

#### **Correction**

**Proposition 1 : Faux.** 12 et 5 sont premiers entre eux, l'équation  $12x - 5y = 1$  a des solutions ; particulièrement le couple (3, 7) donc le couple (9, 21) est solution de  $12x - 5y = 3$ . On opère de manière standard :

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12 \times 9 - 5 \times 21 = 3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-9) - 5(y-21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-9 = 5k \\ y-21 = 12k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = 21 + 12k \end{cases} ;$$

les couples  $(4 + 10k ; 9 + 24k)$  ne sont qu'une partie des couples solutions (la solution 9, 21 n'en fait même pas partie...).

**Proposition 2 : Faux.**  $5^{6n+1} +$  est évidemment divisible par 5 ;  $2^{3n+1}$  n'est formé que de puissances de 2, aucun de ces nombres ne sont divisibles par 5.

**Proposition 3 : Vrai.** Prenons  $n = 1 + 7k$  et remplaçons :  $3n + 4 = 3 + 21k + 4 = 7 + 21k = 7(1 + 3k)$  puis  $4n + 3 = 4(1 + 7k) + 3 = 7 + 28k = 7(1 + 4k)$  ; si le PGCD vaut 7, alors  $1 + 3k$  et  $1 + 4k$  doivent être premiers entre eux : on doit trouver  $u$  et  $v$  tels que

$$u(1 + 4k) + v(1 + 3k) = 1 \Rightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ 4u + 3v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = 4 \end{cases} . \text{ Ok.}$$

**Proposition 4 : Faux.** On teste tous les restes modulo 5 :

$x$	0	1	2	3	4
$x^2 + x + 3$	3	0	4	0	3

donc faux puisqu'on a aussi 3 comme solution possible.

**Proposition 5 : Vrai**

$\begin{cases} M = 100a + 10b + c \\ N = 100b + 10c + a \end{cases} \Rightarrow M - N = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c)$ . Si  $M = 100a + 10b + c$  est un multiple de 27, comme  $108 = 4 \times 27$ , on a  $-8a + 10b + c \equiv 0 [27] \Rightarrow 10b + c = 8a + 27k$ . Pour que  $M - N$  soit divisible par 27 il faut que  $11a - 10b - c = 11a - 8a - 27k = 3a - 27k$  soit divisible par 3, ce qui est le cas.

### 1. 21. Nombres Premiers-1

Le nombre 401 est-il premier ? Résolvez en entiers naturels l'équation  $x^2 - y^2 = 401$ .

### 1. 22. Nombres Premiers-2

$p$  et  $q$  sont des entiers naturels.

- Démontrez que  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$  et par  $2^q - 1$ .
- Déduisez en que pour que  $2^n - 1$  soit premier, il faut que  $n$  soit premier.
- Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition «  $n$  est premier » n'est pas suffisante pour que  $2^n - 1$  soit premier.

### 1. 23. Nombres Premiers-3

Soit  $p$  un entier premier. Montrer que si  $p \geq 5$  alors 24 divise  $p^2 - 1$ .

### 1. 24. Démonstration de Fermat

Soit  $p$ , un entier naturel premier.

- a. Démontrer que si  $k$  est un entier naturel tel que  $1 \leq k \leq p-1$ , le nombre  $\binom{p}{k}$  est divisible par  $p$ .
- b. En déduire que, quel que soit l'entier  $n$ , le nombre  $(n+1)^p - n^p - 1$  est divisible par  $p$ .
- Démontrer que, quel que soit l'entier naturel  $n$ ,  $n^p - n$  est divisible par  $p$  (on pourra faire un raisonnement par récurrence).
- Montrer que pour tout entier  $n$  premier avec  $p$ ,  $n^{p-1} - 1$  est divisible par  $p$ .

### 1. 25. La classe...

Dans une Terminale S, la taille moyenne des élèves est de 167 cm, la taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quel est l'effectif de la classe (inférieur à 40...) ?

### **Correction**

Appelons  $f$  le nombre de filles et  $g$  le nombre de garçons :

$f \times 160 + g \times 173,5 = (f + g) \times 167 \Leftrightarrow 6,5g = 7f \Leftrightarrow 13g = 14f$  donc il y a 13 filles et 14 garçons (ou 26 filles et 28 gars, mais le total dépasse 40).

### 1. 26. Un

Les nombres entiers de 1 à 9999 sont écrits en français : un, deux, trois, quatre, ... dix, onze, ..., vingt, ..., mille deux cent trente quatre, ... puis rangés par ordre alphabétique.

1. Quels sont les deux premiers et les deux derniers de la liste ?
2. Quelle est la position de « un » dans la liste ?

### 2. Bézout

---

#### 2. 27. Bezout-1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres  $x$  et  $y$  entiers relatifs tels que  $31x - 28y = 1$ .
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation  $31x - 28y = 414$ .
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On donne les points  $A(-30; -48)$  et  $B(82; 76)$ . On appelle  $(D)$  la droite  $(AB)$ .

- a. Trouver l'ensemble des points  $M(x; y)$  de  $(D)$  dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.
- b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de  $-10$  à  $+10$  en abscisses et de  $-14$  à  $+14$  en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de  $(D)$  à coordonnées entières visible sur le graphique.
- c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à  $[-40; +40]$  en abscisses et à  $[-50; +10]$  en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de  $(D)$  à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

#### 2. 28. Bezout-2

1. Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $13x - 23y = 1$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $-156x + 276y = 24$ .

#### 2. 29. Bezout-3

1. Démontrer que, pour que la relation suivante  $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 3$  soit satisfaite, pour  $x$  et  $y$  entiers naturels, il faut prendre  $x$  et  $y$  de la forme :  $x = 9(k+3)$  et  $y = 4k$  avec  $k$  entier naturel.
2. Démontrer que le PGCD de  $x$  et  $y$  ne peut être qu'un diviseur de 108.
3. On pose  $m = \text{PPCM}(x; y)$  et on envisage la décomposition de  $m$  en facteurs premiers. Comment faut-il choisir  $k$  pour que :
  - a.  $m$  ne contienne pas le facteur 2 ?
  - b.  $m$  contienne le facteur 2 ou le facteur  $2^2$  ?
  - c.  $m$  ne contienne pas le facteur 3 ?
  - d.  $m$  contienne le facteur 3, ou le facteur  $3^2$ , ou le facteur  $3^3$  ?
4. Comment faut-il choisir  $x$  et  $y$  de telle façon que l'on ait  $\text{PGCD}(x; y) = 18$  ?

#### 2. 30. Bezout-4

1. Décomposer 319 en facteurs premiers.
2. Démontrer que si  $x$  et  $y$  sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres  $3x + 5y$  et  $x + 2y$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  le système d'inconnues  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est le PPCM de } a \text{ et } b.$$



### 2. 31. Bezout-5

Au 8<sup>e</sup> siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

### **3. Anciens exos bac**

---

#### 3. 32. Somme et produit

On considère deux entiers naturels, non nuls,  $x$  et  $y$  premiers entre eux.

On pose  $S = x + y$  et  $P = xy$ .

- a. Démontrer que  $x$  et  $S$  sont premiers entre eux, de même que  $y$  et  $S$ .
  - b. En déduire que  $S$  et  $P$  sont premiers entre eux.
  - c. Démontrer que les nombres  $S$  et  $P$  sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
- Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
  - Trouver les nombres premiers entre eux  $x$  et  $y$  tels que :  $SP = 84$ .
  - Déterminer les deux entiers naturels  $a$  et  $b$  vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \quad \text{avec } d = \text{PGCD}(a ; b)$$

(On pourra poser  $a = dx$  et  $b = dy$  avec  $x$  et  $y$  premiers entre eux.)

#### 3. 33. Quadratique

- Soit  $x$  un entier impair. Quel est le reste de la division de  $x^2$  par 8 ?
- Résoudre dans  $\square \times \square$  l'équation  $x^2 = 8y + 1$ .
- On veut tracer sur l'écran d'une calculatrice comportant 320 points de large sur 200 points de haut les points à coordonnées entières de la courbe d'équation  $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}$ .

Le repère choisi a son origine en bas à gauche de l'écran, et chaque point de l'écran a pour coordonnées sa position à l'écran  $- 1$  (par exemple, le point en haut à droite aura pour coordonnées (319 ; 199)). Combien de points pourra-t-on tracer ?

#### 3. 34. Divisibilité

Le nombre  $n$  est un entier naturel non nul. On pose  $a = 4n + 3$  et  $b = 5n + 2$ . On note  $d$  le PGCD de  $a$  et  $b$ .

- Donner la valeur de  $d$  dans les cas suivants :  $n=1$ ,  $n=11$ ,  $n=15$ .
- Calculer  $5a - 4b$  et en déduire les valeurs possibles de  $d$ .
- a. Déterminer les entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $4n + 3 = 7k$ .
- b. Déterminer les entiers naturels  $n$  et  $k'$  tels que  $5n + 2 = 7k'$ .
- Soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de  $r$  pour laquelle  $d$  vaut 7. Pour quelles valeurs de  $r$ ,  $d$  est-il égal à 1 ?

#### 3. 35. Equation diophantienne

- On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $a + b = 11994$  et dont le PGCD vaut 1999.
- On considère l'équation (E) :  $n^2 - Sn + 11994 = 0$  où  $S$  est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de  $S$  telles que (E) admette deux solutions dans  $\square$ 
  - Peut-on trouver  $S$  tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.
  - Même question avec 5 ?
  - Montrer que tout entier  $n$  solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de  $S$ .

#### 3. 36. Base de numération 1

- Résoudre dans  $\square$  l'équation  $5242 + 13x = 6y$ .

2. Soit  $N$  le nombre dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est  $N = \overline{25x3}$ . Pour quelles valeurs de  $x$  :

\*  $N$  est-il divisible par 6 ?

\*  $N$  est-il divisible par 4 ?

\*  $N$  est-il divisible par 24 ? (24 est écrit en décimal...).

### 3. 37. Base de numération 2

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^{2n} - 1$  est divisible par 8.

En déduire que  $3^{2n+2} + 7$  est un multiple de 8 et que  $3^{2n+4} - 1$  est un multiple de 8.

2. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3. Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre  $A_p$  défini par :  $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$ .

a. Si  $p = 2n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$  par 8 ?

b. Démontrer que, si  $p = 2n + 1$ ,  $A_p$  est divisible par 8.

4. On considère les nombres  $a$  et  $b$  écrits dans le système "base 3" :

$$a = \overline{1110}_{\text{trois}}.$$

$$b = \overline{101010100}_{\text{trois}}.$$

Les nombres  $a$  et  $b$  sont-ils divisibles par 8 ?

5. De même, on considère le nombre  $c = \overline{2002002002000}_{\text{trois}}$ . Démontrer que  $c$  est divisible par 16.

Remarque : pour les questions 4 et 5, on raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix des nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

### 3. 38. Somme des cubes

1. Calculer, en fonction de  $n$ , la somme des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.

2. Démontrer par récurrence que  $\sum_{p=1}^n p^3 = \left( \sum_{p=1}^n p \right)^2$ . Exprimer  $s_n = \sum_{p=1}^n p^3$  en fonction de  $n$ .

3. Soit  $D_n$  le PGCD des nombres  $s_n$  et  $s_{n+1}$ . Calculer  $D_n$  lorsque

a.  $n = 2k$ ,

b.  $n = 2k+1$ .

En déduire que  $s_n$ ,  $s_{n+1}$  et  $s_{n+2}$  sont premiers entre eux.

### 3. 39. Somme des diviseurs

1. On considère le nombre  $n = 200 = 2^3 5^2$ .

a. Combien  $n$  a-t-il de diviseurs ? En utilisant un arbre, calculez les tous et faites leur somme  $s$ .

b. Vérifiez que  $s = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2)$ .

2. On considère maintenant le nombre  $N = a^\alpha b^\beta$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombre premiers,  $\alpha$  et  $\beta$  des entiers.

a. Quel est le nombre de diviseurs de  $N$  ?

b. Soit  $S$  la somme des diviseurs de  $N$ . Montrez que  $S = (1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta)$ .

Déduisez en une expression « simple » de  $S$ .

c. Montrez alors que pour  $\alpha$  et  $\beta$  suffisamment grands on a  $\frac{S}{N} \approx \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1}$ .

3. Application numérique :  $N = 5^{100} 7^{200}$  ; trouver une valeur approchée de  $S$ .



Rappel : la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$  est  $u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

**Correction** : voir *Antisèches TS*.

**3. 40. Racines rationnelles (méthode de Descartes)**

1. Montrer que si  $p$  et  $q$  sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de  $p$  et  $q^3$ .
2. On se propose de trouver les solutions rationnelles de l'équation :

$$(1) : 3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0.$$

On rappelle qu'un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs.

- a. Soit  $\frac{a}{b}$  un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que s'il est solution de (1) alors  $a$  divise 4 et  $b$  divise 3.
- b. Montrer qu'une solution de (1) ne peut pas être négative.
- c. Dédurre de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est  $\frac{2}{3}$ .

3. Résoudre dans  $\Theta$  l'équation  $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$ .

**3. 41. QCM, Banque exercices 2004 - 29**

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors les entiers  $a + b$  et  $a - b$  sont premiers entre eux.
5. Si deux entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors les entiers  $2a + b$  et  $3a + 2b$  sont premiers entre eux.

**3. 42. Cryptographie, Banque exercices 2004 - 30**

1. a. Déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $7u - 13v = 1$ .  
 b. En déduire deux entiers relatifs  $u_0$  et  $v_0$  tels que  $14u_0 - 26v_0 = 4$ .  
 c. Déterminer tous les couples  $(a, k)$  d'entiers relatifs tels que  $14a - 26k = 4$ .
2. On considère deux entiers naturels  $a$  et  $b$ . Pour tout entier  $n$ , on note  $\varphi(n)$  le reste de la division euclidienne de  $an + b$  par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre  $\alpha$  du message, on détermine l'entier  $n$  associé puis on calcule  $\varphi(n)$ . La lettre  $\alpha$  est alors codée par la lettre associée à  $\varphi(n)$ .

On ne connaît pas les entiers  $a$  et  $b$ , mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

- a. Montrer que les entiers  $a$  et  $b$  sont tels que : 
$$\begin{cases} 5a + b = 10 \text{ modulo } 26 \\ 19a + b = 14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$$

- b. En déduire qu'il existe un entier  $k$  tel que  $14a - 26k = 4$ .  
 c. Déterminer tous les couples d'entiers  $(a, b)$ , avec  $0 \leq a \leq 25$  et  $0 \leq b \leq 25$ , tels que

$$\begin{cases} 5a + b = 10 \text{ modulo } 26 \\ 19a + b = 14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$$

3. On suppose que  $a = 17$  et  $b = 3$ .

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si  $\varphi(n) = \varphi(p)$ , alors  $17(n - p) = 0$  modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que  $a = 17$  et  $b = 3$ .

a. Soit  $n$  un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de  $23\varphi(n) + 9 - n$  par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

### 3.43. Repunits 1, Banque exercices 2004 - 31

Des nombres étranges (part one)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1.

Ainsi  $N_1 = 1, N_2 = 11, N_3 = 111, \dots$

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur  $k$  le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit  $N_k$  ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour  $k > 1$ , le rep-unit  $N_k$  est défini par  $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 100 + \dots + 10^{k-1}$ .

Justifier l'égalité :  $9N_k = 10^k - 1$  pour tout entier  $k > 1$ .

4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de  $10^k$ , pour  $k$  entier compris entre 1 et 8.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de $10^k$ par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit  $k$  un entier strictement positif. Démontrer que : «  $10^k \equiv 1(7)$  » équivaut à «  $k$  est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise  $N_k$  si et seulement si  $k$  est multiple de 6.

### 3.44. Repunits 2, Banque exercices 2004 - 32

Des nombres étranges (part two)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1. Ainsi  $N_1 = 1, N_2 = 11, N_3 = 111, \dots$

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de  $N_3, N_4$  et  $N_5$ .

3. Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de  $n^2$  se termine par le chiffre 1.

a. Montrer que, dans son écriture décimale,  $n$  se termine lui-même par 1 ou par 9.

- b. Montrer qu'il existe un entier  $m$  tel que  $n$  s'écrit sous la forme  $10m + 1$  ou  $10m - 1$ .
- c. En déduire que  $n^2 \equiv 1(20)$ .
4. a. Soit  $k > 2$ . Quel est le reste de la division de  $N_k$  par 20 ?  
 b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

**3. 45. Recherche, Banque exercices 2005 - 26**

Pour tout entier  $n \geq 1$  on pose  $u_n = 1! + 2! + \dots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

$$\begin{array}{ll} u_1 = 1 & u_6 = 3^2 \times 97 \\ u_2 = 3 & u_7 = 3^4 \times 73 \\ u_3 = 3^2 & u_8 = 3^2 \times 11 \times 467 \\ u_4 = 3 \times 11 & u_9 = 3^2 \times 131 \times 347 \\ u_5 = 3^2 \times 17 & u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787 \end{array}$$

1. Montrer que  $u_n$  n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.
2. Peut-on affirmer que  $u_n$  est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?
3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang,  $u_n$  est divisible par  $3^2$  mais pas par  $3^3$  ?

**3. 46. Cryptographie, Banque exercices 2005 - 38**

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note  $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ . On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\Omega$  par «  $f(n)$  est le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 11 ».

On désire coder à l'aide de  $f$  le message « BACF ». Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
$n$	2	1	3	6
$f(n)$	3			
Lettre	C			

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par  $g$  la fonction définie sur  $\Omega$  par «  $g(n)$  est le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 11 ». Etablir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de  $g$ . Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de  $g$  ?

3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier  $a$  compris entre 1 et 10 pour que la fonction  $h$  définie sur  $E$  par «  $h(n)$  est le reste de la division euclidienne de  $a^n$  par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères.

Soit  $i$  un élément de  $\Omega$ .

- a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout  $i \in \Omega$ ,  $i < 10$ ,  $a^i$  n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction  $h$  permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.

b. Montrer que s'il existe  $i \in \Omega$ ,  $i < 10$ , tel que  $a^i \equiv 1[11]$ , alors la fonction  $h$  ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.

- c. On suppose que  $i$  est le plus petit entier naturel tel que  $1 \leq i \leq 10$  vérifiant  $a^i \equiv 1[11]$ .

En utilisant la division euclidienne de 10 par  $i$ , prouver que  $i$  est un diviseur de 10.

d. Quelle condition doit vérifier le nombre  $a$  pour permettre le chiffrement et le déchiffrement sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction  $h$  ? Faire la liste de ces nombres.

#### 4. Exercices Baccalauréat

---

##### 4. 47. Puissances de 7, Polynésie 2010

Les parties A et B sont indépendantes

##### Partie A

On considère l'équation (E) :  $7x - 6y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

##### Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples  $(n, m)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \text{ (F).}$$

1. On suppose  $m \leq 4$ . Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que  $m \geq 5$ .
  - a. Montrer que si le couple  $(n, m)$  vérifie la relation (F) alors  $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ .
  - b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple  $(n, m)$  vérifie la relation (F) alors  $n$  est divisible par 4.
  - c. En déduire que si le couple  $(n, m)$  vérifie la relation (F) alors  $7^n \equiv 1 \pmod{5}$ .
  - d. Pour  $m \geq 5$ , existe-t-il des couples  $(n, m)$  d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

##### 4. 48. QCM, Liban 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , le point  $A$  d'affixe  $2 - i$  et  $B$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . On note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

**Proposition 1** : « La similitude directe de centre  $A$  qui transforme  $I$  en  $O$  a pour écriture complexe

$$z' = (1 + i)z - 1 - 2i. \text{ »}$$

2. On appelle  $S$  l'ensemble des couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation  $3x - 5y = 2$ .

**Proposition 2** : « L'ensemble  $S$  est l'ensemble des couples

$$(5k - 1; 3k - 1) \text{ où } k \text{ est un entier relatif. »}$$

3. On considère l'équation (E) :  $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ , où  $(x; y)$  est un couple d'entiers relatifs.

**Proposition 3** : « Il existe des couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

**Proposition 4** : « Pour tout entier naturel  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ), le nombre  $n! + k$  n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E') :  $x^2 - 52x + 480 = 0$ , où  $x$  est un entier naturel.

**Proposition 5** : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E'). »

##### 4. 49. Bézout+spirale, Amérique du Nord 2010

##### Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de l'équation (E) :  $16x - 3y = 4$ .

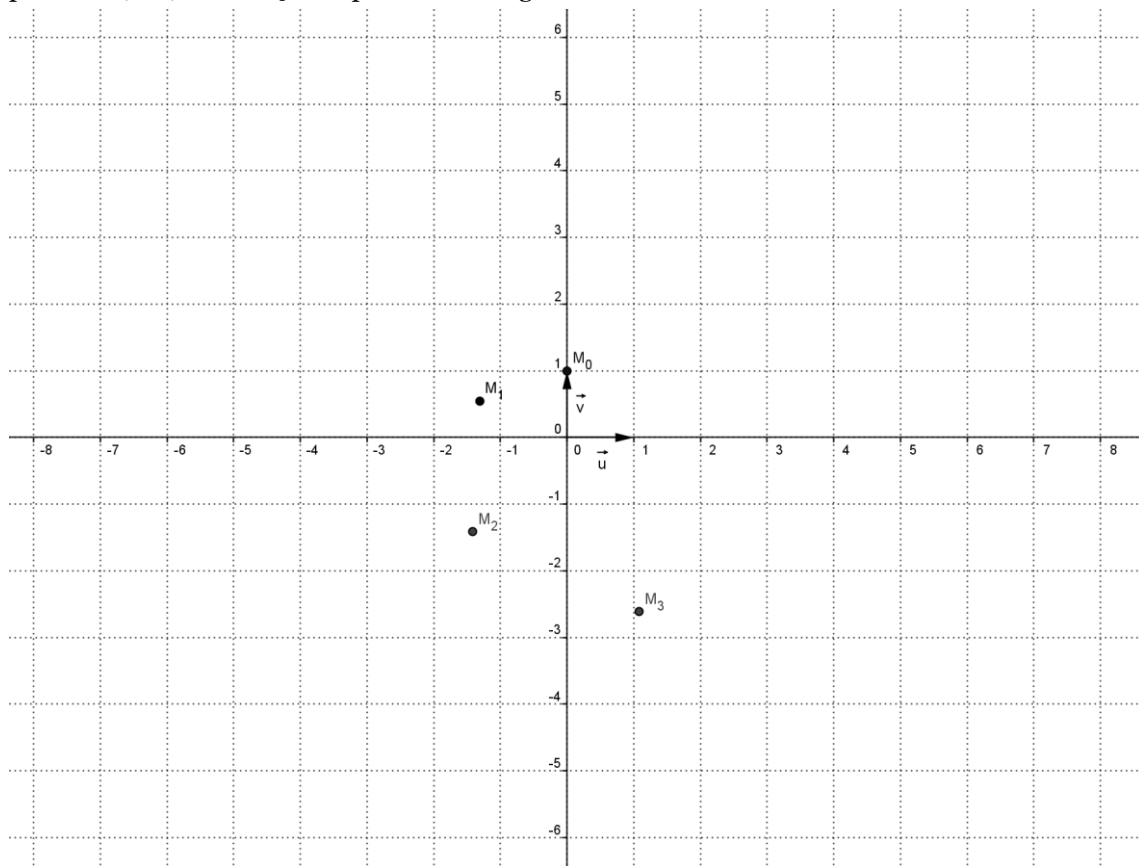
1. Vérifier que le couple  $(1; 4)$  est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère la transformation

$f$  du plan, qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par  $z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} z$ . On définit une suite de points  $(M_n)$  de la manière suivante : le point  $M_0$  a pour affixe  $z_0 = i$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = f(M_n)$ . On note  $z_n$  l'affixe du point  $M_n$ .

Les points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  sont placés sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$ .
2. On note  $g$  la transformation  $f \circ f \circ f \circ f$ .
  - a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .
  - b. En déduire que pour tout entier naturel  $n$   $\overline{OM_{n+4}} = 4\overline{OM_n}$  et que  $(\overline{OM_n}, \overline{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$  où  $k$  est un entier relatif.
  - c. Compléter la figure en construisant les points  $M_4, M_5$  et  $M_6$ .
3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$ .
4. Soient deux entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $p \leq n$ .
  - a. Exprimer en fonction de  $n$  et  $p$  une mesure de  $(\overline{OM_p}, \overline{OM_n})$ .
  - b. Démontrer que les points  $O, M_p$  et  $M_n$  sont alignés si et seulement si  $n-p$  est un multiple de 8.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que le point  $M_n$  appartienne à la demi-droite  $[Ox)$ . On pourra utiliser la partie A.

**4. 50. Carrés et cubes+espace, Pondicherry, 2010**

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

**Partie A**

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs, tels que :  $a^2 = b^3$ .

Soit  $(a, b)$  un tel couple et  $d = \text{PGCD}(a, b)$ . On note  $u$  et  $v$  les entiers tels que  $a = du$  et  $b = dv$ .

1. Montrer que  $u^2 = dv^3$ .
2. En déduire que  $v$  divise  $u$ , puis que  $v = 1$ .
3. Soit  $(a, b)$  un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que l'on a  $a^2 = b^3$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que si  $n$  est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors  $n \equiv 0[7]$  ou  $n \equiv 1[7]$ .

**Partie B**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la surface  $S$  d'équation  $x^2 \times y^2 = z^3$ .

Pour tout réel  $\lambda$ , on note  $C_\lambda$  la section de  $S$  par le plan d'équation  $z = \lambda$ .

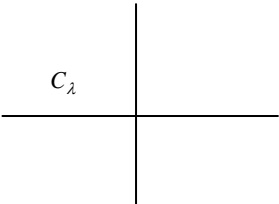
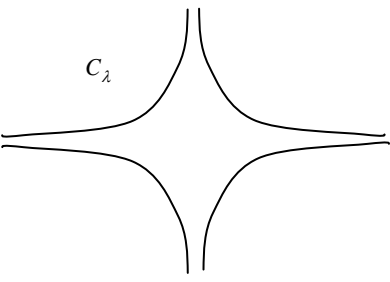
1. Les graphiques suivants donnent l'allure de  $C_\lambda$  tracée dans le plan d'équation  $z = \lambda$ , selon le signe de  $\lambda$ .

Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants :  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$  et justifier l'allure de chaque courbe.

2. a. Déterminer le nombre de points de  $C_{25}$  dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.

Déterminer le nombre de points de  $C_{2010}$  dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

	<p>(pas de courbe visible)</p>	
graphique 1	graphique 2	graphique 3

**4. 51. Surface+équation, Antilles Guyane 2009**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la surface  $S_1$  d'équation  $z = x^2 + y^2$ , et la surface  $S_2$  d'équation  $z = xy + 2x$ .

**Partie A**

On note  $P$  le plan d'équation  $x = 2$ ,  $E_1$  l'intersection de la surface  $S_1$  et du plan  $P$  et  $E_2$  l'intersection de la surface  $S_2$  et du plan  $P$ .

1. a. Déterminer la nature de l'ensemble  $E_1$ .
- b. Déterminer la nature de l'ensemble  $E_2$ .
2. a. Représenter les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  dans un repère  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  du plan P où A est le point de coordonnées  $(2; 0; 0)$ .
- b. Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ .

### Partie B

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection  $M(x; y; z)$  des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  où  $y$  et  $z$  sont des entiers relatifs et  $x$  un nombre premier. On considère un tel point  $M(x; y; z)$ .

1. a. Montrer que  $y(y - x) = x(z - x)$ .
- b. En déduire que le nombre premier  $x$  divise  $y$ .
2. On pose  $y = kx$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
- a. Montrer que  $x$  divise 2, puis que  $x = 2$ .
- b. En déduire les valeurs possibles de  $k$ .
3. Déterminer les coordonnées possibles de  $M$  et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

#### 4. 52. Equation diophantienne, Nelle Calédonie, 2009

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :  $3x + 7y = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Déterminer un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs tels que  $3u + 7v = 1$ .  
En déduire une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de l'équation (E).
  - b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de (E).
2. On considère l'équation notée (G)  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Montrer que  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ . Démontrer que si  $(x; y)$  est solution de (G) alors  $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .
  - b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

- c. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7. En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

#### 4. 53. Puissance de 2, France & La Réunion, 2009

1. a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.
- b. Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $2^{10}$  par 11.
- c. Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $2^{2009} + 2009$  par 11.
2. On désigne par  $p$  un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul  $n$  le nombre  $A_n = 2^n + p$ . On note  $d_n$  le PGCD de  $A_n$  et  $A_{n+1}$ .
  - a. Montrer que  $d_n$  divise  $2^n$ .
  - b. Déterminer la parité de  $A_n$  en fonction de celle de  $p$ . Justifier.
  - c. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Déterminer la parité de  $d_n$  en fonction de celle de  $p$ .  
En déduire le PGCD de  $2^{2009} + 2009$  et  $2^{2010} + 2009$ .



#### 4. 54. Puissances de 3, Liban 2009

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel  $n$  dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que  $n^3 \equiv 2009[10000]$ .

##### Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2009^2$  par 16.
2. En déduire que  $2009^{8001} \equiv 2009[16]$ .

##### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2009^2 - 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$ .

1. a. Démontrer que  $u_0$  est divisible par 5.  
b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} = u_n \left( u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right)$ .
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ .  
2. a. Vérifier que  $u_3 = 2009^{250} - 1$  puis en déduire que  $2009^{250} \equiv 1[625]$ .  
b. Démontrer alors que  $2009^{8001} \equiv 2009[625]$ .

##### Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

#### 4. 55. Divisibilité + espace, La Réunion 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Soient  $F$  le point de coordonnées  $\left(0; 0; \frac{1}{4}\right)$  et  $(P)$  le plan d'équation  $z = -\frac{1}{4}$ .

On note  $d(M, P)$  la distance d'un point  $M$  au plan  $(P)$ . Montrer que l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  qui vérifient  $d(M, P) = MF$  a pour équation  $x^2 + y^2 = z$ .

2. a. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble  $(S)$  avec le plan d'équation  $z = 2$  ?  
b. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble  $(S)$  avec le plan d'équation  $x = 0$  ? Représenter cette intersection dans le repère  $(O; \vec{j}, \vec{k})$ .
3. Dans cette question,  $x$  et  $y$  désignent des nombres entiers naturels.  
a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $x^2$  par 7 ?  
b. Démontrer que 7 divise  $x^2 + y^2$  si et seulement si 7 divise  $x$  et 7 divise  $y$ .

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble  $(S)$  et du plan d'équation  $z = 98$  et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

#### 4. 56. Divisibilité par 7, France 2009

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y)$  de nombres entiers relatifs, solution de l'équation  
(E) :  $8x - 5y = 3$ .

b. Soit  $m$  un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple  $(p, q)$  de nombres entiers vérifiant  $m = 8p + 1$  et  $m = 5q + 4$ . Montrer que le couple  $(p, q)$  est solution de l'équation (E) et en déduire que  $m \equiv 9 \pmod{40}$ .

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers  $m$  supérieurs à 2 000.

2. Soit  $n$  un nombre entier naturel.

a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel  $k$  on a :  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ .

Quel est le reste dans la division euclidienne de  $2^{2009}$  par 7 ?

3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec  $a \neq 0$ .

On considère le nombre  $N = a \times 10^3 + b$ . On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme  $N = \overline{a00b}$ .

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels  $N$  ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que  $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ .

b. En déduire tous les nombres entiers  $N$  cherchés.

#### 4. 57. Bézout+espace, Centres étrangers 2009

1. On note (E) l'équation  $3x + 2y = 29$  où  $x$  et  $y$  sont deux nombres entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois  $x > 0$  et  $y > 0$ .

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées.

L'espace est muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on désigne par (P) le plan d'équation  $3x + 2y = 29$ .

a. Démontrer que (P) est parallèle à l'axe  $(Oz)$  de vecteur directeur  $\vec{k}$ .

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan (P) avec les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  de vecteurs directeurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

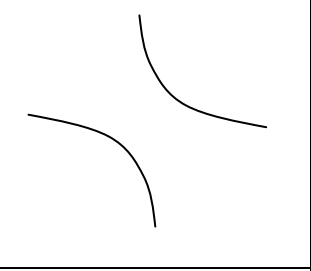
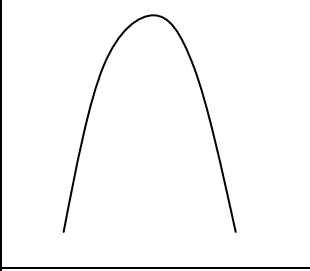
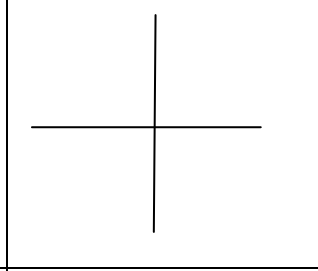
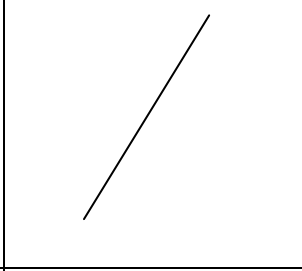
c. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan (P) avec les trois plans de coordonnées.

d. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans (P) et  $(xOy)$ , les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. Étude d'une surface.

(S) est la surface d'équation  $4z = xy$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les figures suivantes représentent les intersections de  $y$  avec certains plans de l'espace.

			
figure n° 1	figure n° 2	figure n° 3	figure n° 4

a.  $S_1$  désigne la section de la surface (S) par le plan  $(xOy)$ . Une des figures données représente  $S_1$ , laquelle ?

b.  $S_2$  désigne la section de la surface (S) par le plan (R) d'équation  $z = 1$ . Une des figures données représente  $S_2$ , laquelle ?

c.  $S_3$  désigne la section de la surface (S) par le plan d'équation  $y = 8$ . Une des figures données représente  $S_3$ , laquelle ?

d.  $S_4$  désigne la section de la surface (S) par le plan (P) d'équation  $3x + 2y = 29$  de la question 2.  
Déterminer les coordonnées des points communs à  $S_4$  et (P) dont l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  sont des entiers naturels vérifiant l'équation  $3x + 2y = 29$ .

#### 4. 58. Restes chinois, Asie 2009

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs  $N$  tels que 
$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit  $N$  un entier relatif solution de ce système. Démontrer que  $N$  peut s'écrire sous la forme  $N = 1 + 17x = 5 + 13y$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs vérifiant la relation  $17x - 13y = 4$ .

c. Résoudre l'équation  $17x - 13y = 4$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $N = 18 + 221k$ .

e. Démontrer l'équivalence entre  $N \equiv 18[221]$  et 
$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$$
.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Existe-t-il un entier naturel  $k$  tel que  $10^k \equiv 1[17]$  ?

b. Existe-t-il un entier naturel  $l$  tel que  $10^l \equiv 18[221]$  ?

#### 4. 59. QCM, Antilles 2009

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$ .  
On note  $A$  le point d'affixe  $2i$ .

Affirmation :  $f$  est la similitude directe, de centre  $A$ , d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et de rapport 2.

2. Affirmation :  $1991^{2009} \equiv 2[7]$ .

3.  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs quelconques,  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Affirmation :  $a \equiv b[p]$  si et seulement si  $na \equiv nb[p]$ .

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  $E$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace dont les coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient l'équation :  $z = x^2 + y^2$ . On note  $S$  la section de  $E$  par le plan d'équation  $y = 3$ .

Affirmation :  $S$  est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  $P$  est la surface d'équation  $x^2 + y^2 = 3z^2$ .

Affirmation :  $O(0; 0; 0)$  est le seul point d'intersection de  $P$  avec le plan  $(yOz)$  dont les coordonnées sont des nombres entiers.

#### 4. 60. Th. de Wilson, Am du Nord 2009

Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle  $[1; 46]$ .

1. On considère l'équation (E) :  $23x + 47y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier  $x$  appartenant à  $A$  tel que  $23x \equiv 1[47]$ .

2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

a. Montrer que si  $ab \equiv 0[47]$  alors  $a \equiv 0[47]$  ou  $b \equiv 0[47]$ .

b. En déduire que si  $a^2 \equiv 1[47]$ , alors  $a \equiv 1[47]$  ou  $a \equiv -1[47]$ .

3. a. Montrer que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un entier relatif  $q$  tel que  $pq \equiv 1[47]$ .

Pour la suite, on admet que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un unique entier, noté  $\text{inv}(p)$ , appartenant à  $A$  tel que  $p \cdot \text{inv}(p) \equiv 1[47]$ .

Par exemple :  $\text{inv}(1) = 1$  car  $1 \cdot 1 \equiv 1[47]$ ,  $\text{inv}(2) = 24$  car  $2 \cdot 24 \equiv 1[47]$ ,  $\text{inv}(3) = 16$  car  $3 \cdot 16 \equiv 1[47]$ .

b. Quels sont les entiers  $p$  de  $A$  qui vérifient  $p = \text{inv}(p)$  ?

c. Montrer que  $46! \equiv -1[47]$ .

#### 4. 61. ROC+Base 12, N. Calédonie, mars 2008 (c)

5 points

##### Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

##### Partie B

On note  $0, 1, 2, \dots, 9, \alpha, \beta$ , les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 144 + 10 \times 12 + 7 = 1711 \text{ en base 10.}$$

1. a. Soit  $N_1$  le nombre s'écrivant en base 12 :  $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$ . Déterminer l'écriture de  $N_1$  en base 10.

b. Soit  $N_2$  le nombre s'écrivant en base 10 :  $N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$ .

Déterminer l'écriture de  $N_2$  en base 12.

Dans toute la suite un entier naturel  $N$  s'écrira de manière générale en base 12 :  $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12}$ .

2. a. Démontrer que  $N \equiv a_0[3]$ . En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si  $N_2$  est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que  $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0[11]$ . En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si  $N_1$  est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre  $N$  s'écrit  $N = \overline{x4y}^{12}$ . Déterminer les valeurs de  $x$  et de  $y$  pour lesquelles  $N$  est divisible par 33.

##### Correction

##### Partie A : Question de cours

Les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances sont  $a \equiv a'[p]$  et  $b \equiv b'[p]$  alors  $a + b \equiv a' + b'[p]$ ,  $ab \equiv a'b'[p]$  et  $a^n \equiv a'^n[p]$ .

Propriété de compatibilité avec la multiplication :

on pose que  $a = pk + a'$ ,  $b = ph + b'$  d'où  $ab = p^2kh + a'ph + b'pk + a'b' = a'b' + p(\dots)$ .

##### Partie B

1. a.  $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = 12^2 \times 11 + 12 \times 1 + 10 = 1606$ .

b. Il faut diviser par 12 plusieurs fois :  $1131 \equiv 12 \times 94 + 3$ ,  $94 \equiv 12 \times 7 + 10 = 12 \times 7 + \alpha$ , donc

$$N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12} = 7 \times 12^2 + \alpha \times 12 + 3 = 7 \times 144 + 10 \times 12 + 3 = 1131.$$

2. a.  $N = 12^{n-1} \times a_n + \dots + 12 \times a_1 + a_0 \equiv a_0 [12] \equiv a_0 [3]$ . Si le dernier chiffre est 0 modulo 3, soit un multiple de 3 le nombre sera divisible par 3.

b.  $N_2$  se termine par 3 en base 12, il est divisible par 3. En base 10 la somme des chiffres est 6, il est donc divisible par 3.

3. a. Chaque puissance de 12 est congrue à 1 modulo 11 donc  $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [11]$ . Si la somme des chiffres est un multiple de 11, ce nombre sera divisible par 11.

b. La somme des chiffres de  $N_1$  en base 12 est  $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22$  donc  $N_1$  est divisible par 11. En base 10 on fait la somme des termes de rang pair moins la somme des termes de rang impair :  $12 - 1 = 11$  qui est divisible par 11.

4.  $N = \overline{x4y}^{12}$ .  $N$  est divisible par 33 si  $N$  est divisible par 3 :  $y = 3k$ , et par 11 :  $x + 4 + y = 11k'$ .

On résoud :  $\begin{cases} y = 3k \\ x + 4 + 3k = 11k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3k \\ x = 11k' - 3k - 4 \end{cases}$  ; les valeurs possibles de  $k$  sont 0, 1, 2, 3 :

$k$	$y$	$x$	$k'$	$N$	$N(\text{b. } 10)$
0	0	$11k' - 4$	$k' = 1$ soit $x = 7$	$\overline{740}^{12}$	1056
1	3	$11k' - 7$	$k' = 1$ soit $x = 4$	$\overline{443}^{12}$	627
2	6	$11k' - 10$	$k' = 1$ soit $x = 1$	$\overline{146}^{12}$	198
3	9	$11k' - 13$	$k' = 2$ soit $x = 9$	$\overline{949}^{12}$	1353

#### 4. 62. QCM, Polynésie, juin 2008

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Proposition 1 : « Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $n$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux. »

2. Soit  $x$  un entier relatif.

Proposition 2 : «  $x^2 + x + 3 = 0$  (modulo 5) si et seulement si  $x \equiv 1$  (modulo 5). »

3. Soit  $N$  un entier naturel dont l'écriture en base 10 est  $\overline{aba7}$ .

Proposition 3 : « Si  $N$  est divisible par 7 alors  $a + b$  est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et de centre le point d'affixe  $1 - i$

a pour écriture complexe  $z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ . »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère un point  $A$ . On désigne par  $a$  son affixe. On note  $s$  la réflexion d'axe  $(O; \vec{u})$  et  $s_A$  la symétrie centrale de centre  $A$ .

Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes  $a$  tels que  $s \circ s_A = s_A \circ s$  est l'ensemble des nombres réels. »

4. 63. QCM, Liban, juin 2008

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la similitude directe  $f$  d'écriture complexe  $z \rightarrow \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i$ .

Proposition 1 : «  $f = r \circ h$  où  $h$  est l'homothétie de rapport  $3\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $-2-2i$  et où  $r$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  ».

2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul :

Proposition 2 : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 5 ».

Proposition 3 : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation  $11x - 5y = 14$ .

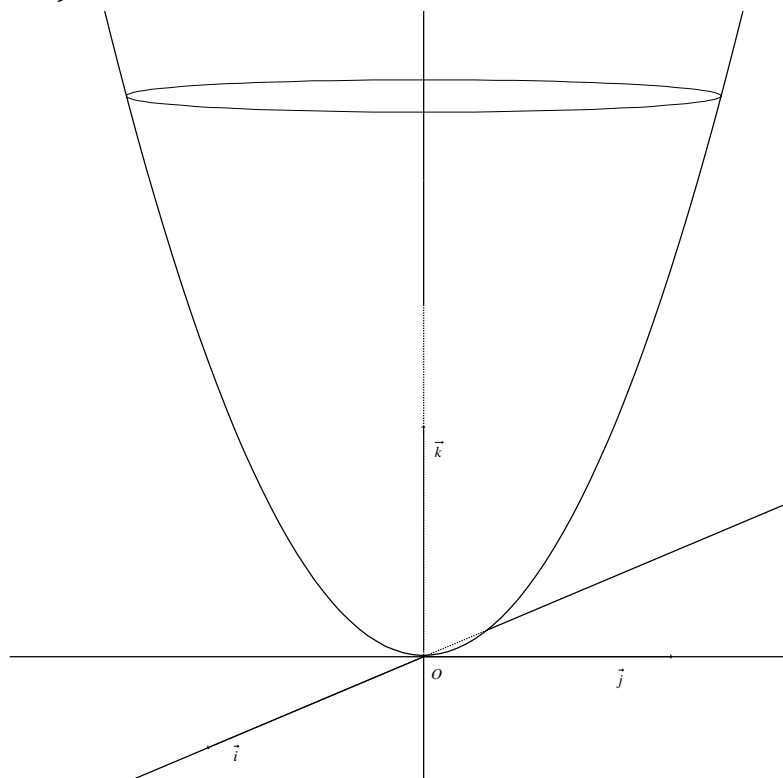
Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées  $(5k+14; 11k+28)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  ».

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

La surface  $\Sigma$  ci-dessous a pour équation  $z = x^2 + y^2$ .

Proposition 5 : « la section de la surface  $\Sigma$  et du plan d'équation  $x = \lambda$ , où  $\lambda$  est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation  $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$  partage le solide délimité par  $\Sigma$  et le plan d'équation  $z = 9$  en deux solides de même volume ».



Rappel : Soit  $V$  le volume du solide délimité par  $\Sigma$  et les plans d'équations  $z = a$  et  $z = b$  où  $0 \leq a \leq b \leq 9$ .

$V$  est donné par la formule  $V = \int_a^b S(k) dk$  où  $S(k)$  est l'aire de la section du solide par le plan d'équation  $z=k$  où  $k \in [a, b]$ .

#### 4. 64. Réseau, Asie, juin 2008

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers  $a$  et  $b$  l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées  $(x ; y)$  sont des entiers vérifiant les conditions :  $0 \leq x \leq a$  et  $0 \leq y \leq b$ . On note  $R_{a,b}$  ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers  $x$  et  $y$  à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

#### A. Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points  $M(x ; y)$  du réseau  $R_{8,8}$  vérifiant :

- $x \equiv 2 \pmod{3}$  et  $y \equiv 1 \pmod{3}$ , sur le graphique 1 ;
- $x + y \equiv 1 \pmod{3}$ , sur le graphique 2 ;
- $x \equiv y \pmod{3}$ , sur le graphique 3.

#### B. Résolution d'une équation.

On considère l'équation (E) :  $7x - 4y = 1$ , où les inconnues  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- Déterminer un couple d'entiers relatifs  $(x_0 ; y_0)$  solution de l'équation (E).
- Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution  $(x ; y)$  pour laquelle le point  $M(x ; y)$  correspondant appartient au réseau  $R_{4,7}$ .

#### C. Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

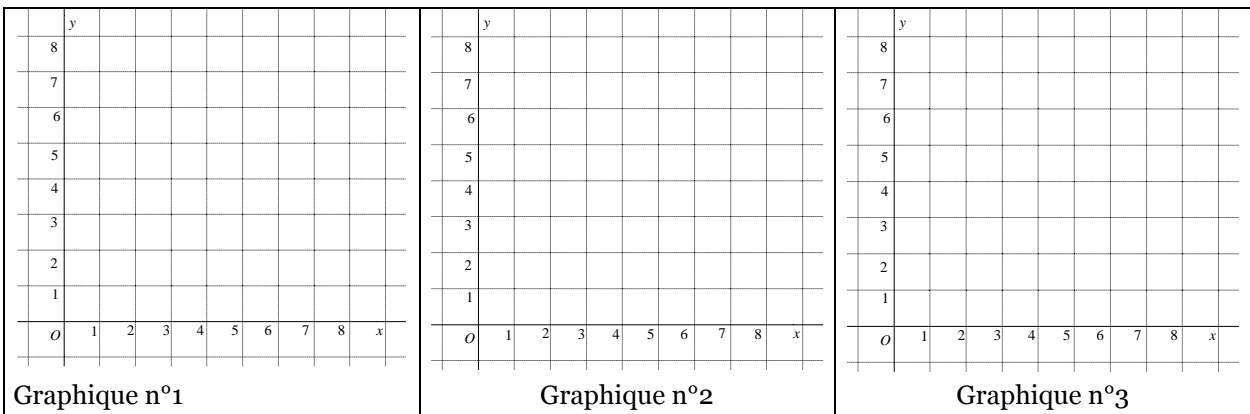
Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale  $[OA]$  du réseau  $R_{a,b}$ , avec  $O(0 ; 0)$  et  $A(a ; b)$ .

- Démontrer que les points du segment  $[OA]$  sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, ay = bx.$$

- Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors les points  $O$  et  $A$  sont les seuls points du segment  $[OA]$  appartenant au réseau  $R_{a,b}$ .

- Démontrer que si  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux, alors le segment  $[OA]$  contient au moins un autre point du réseau. (On pourra considérer le pgcd  $d$  des nombres  $a$  et  $b$  et poser  $a = da'$  et  $b = db'$ .)





4. 65. Codage affine, Antilles, juin 2008

**Partie A**

On considère l'équation (E) :  $11x - 26y = 1$ , où  $x$  et  $y$  désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple  $(-7; -3)$  est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  solution de (E) tel que  $0 \leq u \leq 25$ .

**Partie B**

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier  $x$  compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule  $11x + 8$ ,
  - on calcule le reste de la division euclidienne de  $11x + 8$  par 26, que l'on appelle  $y$ .
- $x$  est alors « codé » par  $y$ .

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ;  $11 \times 11 + 8 = 129 \equiv 25 \pmod{26}$  ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
  - a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs  $x$  et  $j$ , on a :

$$11x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 19j \pmod{26}.$$

- b. En déduire un procédé de décodage.
- c. Décoder la lettre W.

4. 66. Surface+Eq. dioph., Am Nord, juin 2008 (c)

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On nomme (S) la surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan  $(xOy)$ .
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives  $(3; 1; -3)$  et  $(-1; 1; 1)$ .
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
  - b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan  $(xOy)$ .
4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation  $z = 68$ . Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
  - b. M étant un point de (C), on désigne par  $a$  son abscisse et par  $b$  son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que  $a$  et  $b$  soient des entiers naturels vérifiant  $a < b$  et  $\text{ppcm}(a; b) = 440$ , c'est-à-dire tel que  $(a, b)$  soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}.$$

Montrer que si  $(a, b)$  est solution de (1) alors  $\text{pgcd}(a; b)$  est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

**Correction**

1. Si  $M(x; y; z)$  appartient à (S), alors on a  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , soit  $x^2 + y^2 - (-z)^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , c'est-à-dire que le point  $M'$  de coordonnées  $(x; y; -z)$  appartient également à (S) et réciproquement.

Par conséquent, le plan d'équation  $z=0$ , c'est-à-dire le plan  $(xOy)$ , est un plan de symétrie de la surface (S).

$$2. a. M \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM} = k\overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -4k \\ y-1 = 0k \\ z+3 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k+3 \\ y = 1 \\ z = 4k-3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

b. On remplace  $x, y$  et  $z$  dans l'équation de (S) :

$$x^2 + y^2 - z^2 = (-4k+3)^2 + 1^2 - (4k-3)^2 = 16k^2 - 24k + 9 + 1 - 16k^2 + 24k - 9 = 1, \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

On en déduit que tout point de (D) appartient à (S), la droite est incluse dans la surface (S).

3. Soit (P) un plan parallèle au plan  $(xOy)$ . (P) a alors une équation de la forme  $z=c$  où  $c$  est un réel, soit  $x^2 + y^2 = c^2 + 1$  qui est l'équation d'un cercle de centre  $\Omega(0; 0; c)$  et de rayon  $\sqrt{1+c^2}$ , tracé dans (P). La section de la surface (S) par un plan parallèle au plan  $(xOy)$  est un cercle.

4. a. Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation  $z=68$ .

D'après la question précédente (C) est le cercle de centre  $\Omega(0; 0; 68)$  et de rayon  $\sqrt{1+68^2} = 5\sqrt{185}$ , tracé dans le plan d'équation  $z=68$ .

$$b. \text{ Soit } (a; b) \text{ une solution de (1). Alors : } \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}.$$

$d$  le PGCD de  $a$  et  $b$  divise  $a$  (et aussi  $a^2$ ) et divise  $b$  (et aussi  $b^2$ ), d'où  $d$  divise  $a^2 + b^2$ ;  $d$  divise 4625.

De plus,  $d$  divise le PPCM de  $a$  et  $b$ . Donc  $d$  divise 440,  $d$  est un diviseur commun de 440 et de 4625.

Or les diviseurs de 4625 sont : 1; 5; 25; 37; 125; 185; 925 et 4625.

Les diviseurs de 440 sont : 1; 2; 4; 5; 8; 10; 11; 20; 22; 40; 44; 55; 88; 110; 220 et 440.

$d$  ne peut être égal qu'à 1 ou à 5.

\*  $d=1$ ,  $ab = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)$ , c'est-à-dire  $ab = 1 \times 440 = 440$ .

$a$  et  $b$  sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 440.

Or  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 880 = 5505$ ; ce qui est impossible car  $a+b$  est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels). Il n'y a dans ce cas aucun couple solution de ce système.

\* Supposons que  $d=5$ ; alors  $ab = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)$ , c'est-à-dire  $ab = 5 \times 440 = 2200$ .

$a$  et  $b$  sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 2200.

Or  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 4400 = 9025$ , soit  $a+b=95$ .

Seul le couple  $(40; 55)$  est solution de ce système dans ce cas.

Il existe un seul point  $M$  de (C) tel que  $a$  et  $b$  soient des entiers naturels vérifiant  $a < b$  et  $\text{ppcm}(a; b) = 440$ .

#### 4. 67. Bézout+Fermat, National, sept 2007

1. On considère l'ensemble  $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

a. Pour tout élément  $a$  de  $A_7$  écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément  $y$  de  $A_7$  tel que  $ay \equiv 1[7]$  (soit modulo 7).

$a$	1	2	3	4	5	6
$y$						

b. Pour  $x$  entier relatif, démontrer que l'équation  $3x \equiv 5[7]$  équivaut à  $x \equiv 4[7]$ .

c. Si  $a$  est un élément de  $A_7$ , montrer que les seuls entiers relatifs  $x$  solutions de l'équation  $ax \equiv 0[7]$  sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question  $p$  est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble  $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$  des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à  $p$ . Soit  $a$  un élément de  $A_p$ .

a. Vérifier que  $a^{p-2}$  est une solution de l'équation  $ax \equiv 1[p]$ .

b. On note  $r$  le reste dans la division euclidienne de  $a^{p-2}$  par  $p$ . Démontrer que  $r$  est l'unique solution dans  $A_p$  de l'équation  $ax \equiv 1[p]$ .

c. Soient  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs. Démontrer que  $xy \equiv 0[p]$  si et seulement si  $x$  est un multiple de  $p$  ou  $y$  est un multiple de  $p$ .

d. Application :  $p = 31$ .

Résoudre dans  $A_{31}$  les équations  $2x \equiv 1[31]$  et  $3x \equiv 1[31]$ .

A l'aide des résultats précédents résoudre dans  $\square$  l'équation  $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$ .

#### 4. 68. Bézout, N. Calédonie, mars 2007

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de  $6^{10}$  par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de  $6^4$  par 5 ? Justifier.

c. En déduire que  $6^{40} \equiv 1[11]$  et que  $6^{40} \equiv 1[5]$ .

d. Démontrer que  $6^{40} - 1$  est divisible par 55.

2. Dans cette question  $x$  et  $y$  désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation (E)  $65x - 40y = 1$  n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation (E')  $17x - 40y = 1$  admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel  $x_0$  inférieur à 40 tel que  $17x_0 \equiv 1[40]$ .

3. Pour tout entier naturel  $a$ , démontrer que si  $a^{17} \equiv b[55]$  et si  $a^{40} \equiv 1[55]$ , alors  $b^{33} \equiv a[55]$ .

#### 4. 69. Codage affine, N. Calédonie, mars 2007

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier  $n$  de l'ensemble  $\Omega = \{0; 1; 2; \dots; 24; 25\}$  selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

$a$  et  $b$  étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier  $n$  de  $\Omega$  le reste de la division euclidienne de  $(an + b)$  par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

*Exemple* : pour coder la lettre P avec  $a = 2$  et  $b = 3$ , on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier  $n = 15$  ;

étape 2 : le reste de la division de  $2 \times 15 + 3 = 33$  par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend  $a = 0$  ?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit  $a = 13$ .

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend  $a = 5$  et  $b = 2$ .

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers  $n$  et  $p$ . Montrer, que si  $5n + 2$  et  $5p + 2$  ont le même reste dans la division par 26 alors  $n - p$  est un multiple de 26. En déduire que  $n = p$ .

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément  $n$  de  $\Omega$  tel que  $5n - 26y = 2$ , où  $y$  est un entier.

b. On considère l'équation  $5x - 26y = 2$ , avec  $x$  et  $y$  entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation  $5x - 26y = 2$ .

ii. Résoudre alors l'équation  $5x - 26y = 2$ .

iii. En déduire qu'il existe un unique couple  $(x ; y)$  solution de l'équation précédente, avec  $0 \leq x \leq 25$ .

c. Décoder alors la lettre E.

#### 4. 70. Surface+éq. dioph., Polynésie juin 2007

##### **Partie A**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les points  $A(1 ; 3 ; 2)$ ,  $B(4 ; 6 ; -4)$  et le cône  $(\Gamma)$  d'axe  $(O ; \vec{k})$ , de sommet  $O$  et contenant le point  $A$ .

1. Montrer qu'une équation de  $(\Gamma)$  est  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$ .

2. Soit  $(P)$  le plan parallèle au plan  $(xOy)$  et contenant le point  $B$ .

a. Déterminer une équation de  $(P)$ .

b. Préciser la nature de l'intersection  $(C_1)$  de  $(P)$  et de  $(\Gamma)$ .

3. Soit  $(Q)$  le plan d'équation  $y = 3$ . On note  $(C_2)$  l'intersection de  $(Q)$  et de  $(\Gamma)$ . Sans justification reconnaître la nature de  $(C_2)$  parmi les propositions suivantes :

\* deux droites parallèles ;

\* deux droites sécantes ;

\* une parabole ;

\* une hyperbole ;

\* un cercle.

##### **Partie B**

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois entiers relatifs et  $M$  le point de coordonnées  $(x ; y ; z)$ . Les ensembles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation  $(E) : x^2 + y^2 = 40$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation  $(E)$ .

b. En déduire l'ensemble des points de  $(C_1)$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$ , où  $x, y$  et  $z$  sont des entiers relatifs, est un point de  $(\Gamma)$  alors  $z$  est divisible par 2 et  $x^2 + y^2$  est divisible par 10.

b. Montrer que si  $M$  est un point de  $(C_2)$  alors  $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$ .

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation  $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$ .

d. Déterminer un point de  $(C_2)$ , distinct de  $A$ , dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

#### 4. 71. QCM, Liban juin 2007

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe  $z$  associe le point d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = 2iz + 1$ .

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre  $A$  d'affixe  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on note  $S$  la surface d'équation  $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$ .

Proposition 2 : « La section de  $S$  avec le plan d'équation  $z = 5$  est un cercle de centre  $A$  de coordonnées  $(-1; 0; 5)$  et de rayon 5 ».

3. Proposition 3 : «  $5^{750} - 1$  est un multiple de 7 ».

4. Proposition 4 : « Si un entier naturel  $n$  est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de  $3n + 4$  et de  $4n + 3$  est égal à 7 ».

5. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 2$  alors le PGCD de  $a$  et  $b$  est égal à 2 ».

#### 4. 72. Bézout, National septembre 2006

1. On considère l'équation (E) :  $17x - 24y = 9$  où  $(x, y)$  est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple  $(9; 6)$  est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

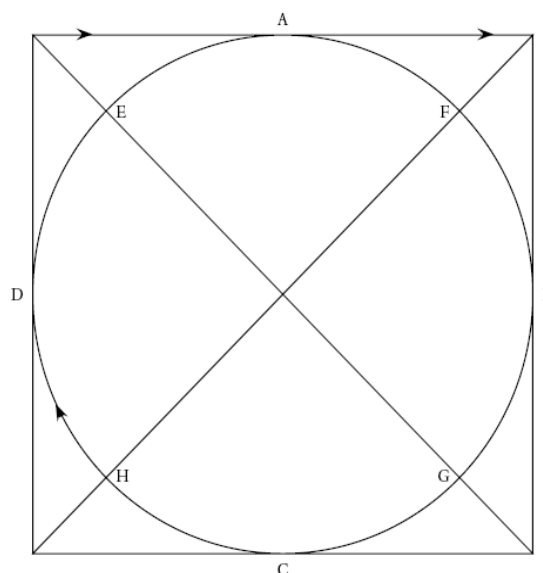
2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.

Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant  $t = 0$ , Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.



a. On suppose qu'à un certain instant  $t$  Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant  $t$ , on note  $y$  le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et  $x$  le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que  $(x, y)$  est solution de l'équation (E) de la question 1.

- b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?  
 c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.  
 d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

**4. 73. ROC+Congruences, Am. du Sud nov. 2006 (c)**

Rappel : Pour deux entiers relatifs  $a$  et  $b$ , on dit que  $a$  est congru à  $b$  modulo 7, et on écrit  $a \equiv b \pmod{7}$  lorsqu'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = b + 7k$ .

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances

a. Soient  $a, b, c$  et  $d$  des entiers relatifs.

Démontrer que : si  $a \equiv b \pmod{7}$  et  $c \equiv d \pmod{7}$  alors  $ac \equiv bd \pmod{7}$ .

b. En déduire que : pour  $a$  et  $b$  entiers relatifs non nuls si  $a \equiv b \pmod{7}$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $a^n \equiv b^n \pmod{7}$ .

2. Pour  $a = 2$  puis pour  $a = 3$ , déterminer un entier naturel  $n$  non nul tel que  $a^n \equiv 1 \pmod{7}$ .

3. Soit  $a$  un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que :  $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$ .

b. On appelle *ordre* de  $a \pmod{7}$ , et on désigne par  $k$ , le plus petit entier naturel non nul tel que  $a^k \equiv 1 \pmod{7}$ .

Montrer que le reste  $r$  de la division euclidienne de 6 par  $k$  vérifie  $a^r \equiv 1 \pmod{7}$ . En déduire que  $k$  divise 6.

6. Quelles sont les valeurs possibles de  $k$  ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers  $a$  compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel  $n$ , on associe le nombre  $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ . Montrer que  $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$ .

**Correction**

1. a. On écrit que  $a = b + 7k$ ,  $c = d + 7k'$  d'où

$$ac = (b + 7k)(d + 7k') = bd + 7(bk' + dk + 7kk') \Leftrightarrow ac \equiv bd \pmod{7}.$$

b. Par récurrence : vrai pour  $n = 1$ . Supposons  $a^n \equiv b^n \pmod{7}$ , alors  $a^n \times a \equiv b^n \times b \pmod{7} \Leftrightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{7}$ .

2. Pour  $a = 2$  puis pour  $a = 3$ , déterminer un entier naturel  $n$  non nul tel que  $a^n \equiv 1 \pmod{7}$ .

On cherche les restes de  $2^n$  et  $3^n$  modulo 7 :

$n$	1	2	3	4	5	6
$2^n$	2	4	1	2	4	1
$3^n$	3	2	6 ou -1	4 ou -3	5 ou -2	1

Donc pour 2 la première valeur de  $n$  est 3, pour 3 c'est 6.

3. a. Théorème de Fermat : si  $p$  premier ne divise pas  $a$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  d'où avec  $p = 7$  :  $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$ .

b. On a donc  $6 = kq + r \Rightarrow a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = (a^k)^q a^r$  ; comme  $a^k \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $(a^k)^q \equiv 1^q \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $a^r \equiv 1 \pmod{7}$ . Comme  $k$  est le plus petit entier tel que  $a^k \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $r=0$  donc  $k$  divise 6, soit  $k=1, 2, 3$  ou 6.

c.

$a$	$a^2 \pmod{7}$	$a^3 \pmod{7}$	$a^6 \pmod{7}$
1 ( $k=1$ )	1	1	1
2 ( $k=3$ )	4	1	1
3 ( $k=6$ )	2	6	1
4 ( $k=3$ )	2	1	1

5 (k=6)	4	6	1
6 (k=2)	1	6	1

4.  $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$ , et  $2006 = 2 \times 1003 = 3 \times 668 + 2 = 6 \times 334 + 2$ ; on a donc

$$2^{2006} = (2^3)^{668} \times 2^2 \equiv 4[7], \quad 3^{2006} = (3^6)^{334} \times 3^2 \equiv 9[7] \equiv 2[7], \quad 4^{2006} = (4^3)^{668} \times 4^2 \equiv 16[7] \equiv 2[7],$$

$$5^{2006} = (5^6)^{334} \times 5^2 \equiv 25[7] \equiv 4[7] \text{ et } 6^{2006} = (6^2)^{1003} \equiv 1[7]$$

d'où enfin  $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1[7] \equiv 13[7] \equiv 6[7]$ .

#### 4. 74. QCM, Polynésie, juin 2006 (c)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

**Proposition 1 :** « Pour tout entier naturel  $n$ , 3 divise le nombre  $2^{2n} - 1$  ».

**Proposition 2 :** « Si un entier relatif  $x$  est solution de l'équation  $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$  alors  $x \equiv 0 \pmod{3}$  ».

**Proposition 3 :** « L'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de l'équation  $12x - 5y = 3$  est l'ensemble des couples  $(4+10k; 9+24k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  ».

**Proposition 4 :** « Il existe un seul couple  $(a; b)$  de nombres entiers naturels, tel que  $a < b$  et  $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$  ».

Deux entiers naturels  $M$  et  $N$  sont tels que  $M$  a pour écriture  $abc$  en base dix et  $N$  a pour écriture  $bca$  en base dix.

**Proposition 5 :** « Si l'entier  $M$  est divisible par 27 alors l'entier  $M - N$  est aussi divisible par 27 ».

#### Correction

**Proposition 1 : Vrai.**

On fait l'essai. Ca semble marcher.

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n} - 1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

Vérifions :  $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$ .

**Proposition 2 : Faux.**

$x^2 + x = x(x+1)$  est un multiple de 2 donc pour que ce soit un multiple de 6, il faut qu'un des deux termes  $x$  ou  $x+1$  soit un multiple de 3; on pourrait alors avoir  $x+1 \equiv 0[3] \Leftrightarrow x \equiv 2[3]$ . Par exemple 5 donne  $25 + 5 = 30$  qui est bien un multiple de 3.

**Proposition 3 : Faux.**

$12x - 5y = 3$  a comme solution particulière  $x = 4$  et  $y = 9$ ; on a alors

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12 \times 4 - 5 \times 9 = 3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4) - 5(y-9) = 0 \Leftrightarrow 12(x-4) = 5(y-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 5k \\ y-9 = 12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 9 + 12k \end{cases}$$

**Proposition 4 : Vrai.**

Posons  $\begin{cases} a = a_1 k \\ b = b_1 k \end{cases}$  où  $k$  est PGCD( $a, b$ ); on a alors  $a_1 b_1 k - k = 1 \Rightarrow k = 1$  sinon  $k$  diviserait 1. Notre équation

devient alors :  $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$  devient donc  $ab - 1 = 1 \Leftrightarrow ab = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ .



Deux entiers naturels  $M$  et  $N$  sont tels que  $M$  a pour écriture  $abc$  en base dix et  $N$  a pour écriture  $bca$  en base dix.

**Proposition 5 : Vrai.**

$$M = \overline{abc} = 100a + 10b + c, \quad N = \overline{bca} = 100b + 10c + a \text{ donc}$$

$$M - N = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a = 9(11a - 10b - c)$$

est divisible par 27 si  $11a - 10b - c$  est divisible par 3.

Sachant qu'on a  $M = 100a + 10b + c = 27k \Leftrightarrow 10b + c = 27k - 100a$ , on remplace :

$$11a - 10b - c = 11a - 27k + 100a = 111a - 27k ;$$

or 111 est un multiple de 3. Ok.

**4. 75. Restes chinois, National, juin 2006 (c)**

*Partie A : Question de cours*

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

*Partie B*

Il s'agit de résoudre dans  $\square$  le système  $(S) \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$ .

1. Démontrer qu'il existe un couple  $(u ; v)$  d'entiers relatifs tel que :  $19u + 12v = 1$ .  
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).  
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est une solution de  $(S)$ .

2. a. Soit  $n_0$  une solution de  $(S)$ , vérifier que le système  $(S)$  équivaut à  $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$ .

- b. Démontrer que le système  $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$  équivaut à  $n \equiv n_0(12 \times 19)$ .

3. a. Trouver un couple  $(u ; v)$  solution de l'équation  $19u + 12v = 1$  et calculer la valeur de  $N$  correspondante.

- b. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(S)$  (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel  $n$  est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise  $n$  par  $228 = 12 \times 19$ . Quel est le reste  $r$  de cette division ?

**Correction**

*Partie A : Question de cours, voir démonstrations arithmétique.*

$$\text{Partie B : } (S) \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 + 19k \\ n \equiv 6 + 12k' \end{cases}$$

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple  $(u ; v)$  d'entiers relatifs tel que :  $19u + 12v = 1$ .

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est une solution de  $(S)$  : il faut mettre  $N$  sous la forme  $N \equiv 13 + 19k$ . Or  $12v = 1 - 19u$  donc  $N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 + 19 \times (-7u)$  ; ok.

De même  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 12v + 6(1 - 12v) = 6 + 12 \times 7v$  ; ok.

2. a. Si  $n_0$  est une solution de  $(S)$ , on a  $\begin{cases} n_0 = 13 + 19k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$  d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$$

b. En fait 19 divise  $n - n_0$  de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux,  $19 \times 12$  divise  $n - n_0$ , ce qui équivaut à  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a  $19(-5) + 12(8) = 1$  ; on peut donc prendre  $u = -5$  dans  $N = 13 + 19 \times (-7u)$ , ce qui donne  $N = 678$  ; de même on prend  $v = 8$  et  $N = 6 + 12 \times (7v)$ , ce qui redonne bien  $N = 678$ .

b.  $p(\bar{C}, \bar{C}) = p(\bar{C})p(\bar{C}) = 0,8^2 = 0,64$ .

4. 222.

#### 4. 76. Fermat, Centres étrangers, juin 2006

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier  $4n - 1$ , lorsque  $n$  est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si  $p$  est un nombre entier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ».

#### Partie A : quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n$  est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que  $4^{28} - 1$  est divisible par 29.

3. Pour  $1 \leq n \leq 4$ , déterminer le reste de la division de  $4^n$  par 17. En déduire que, pour tout entier  $k$ , le nombre  $4^{4k} - 1$  est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels  $n$  le nombre  $4^n - 1$  est-il divisible par 5 ?

5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de  $4^{28} - 1$ .

#### Partie B : divisibilité par un nombre premier

Soit  $p$  un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ .

2. Soit  $n \geq 1$  un entier naturel tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ . On note  $b$  le plus petit entier strictement positif tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $b$ .

a. Démontrer que  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ . En déduire que  $r = 0$ .

b. Prouver l'équivalence :  $4^n - 1$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $n$  est multiple de  $b$ .

c. En déduire que  $b$  divise  $p - 1$ .

#### 4. 77. Eq. diophantienne, Asie, juin 2006

Étant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$ .

#### Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose  $n = 2$ . Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose  $n = 3$ .

a. Soit  $m$  un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste  $r$  de la division euclidienne de  $m$  par 8 et le reste  $R$  de la division euclidienne de  $m^2$  par 8.

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7
$R$								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}$  ?

#### Partie B : Étude du cas général où $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$ .

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que  $x$  et  $y$  sont pairs et que  $z$  est impair. On pose alors  $x = 2q$ ,  $y = 2r$ ,  $z = 2s + 1$  où  $q$ ,  $r$ ,  $s$  sont des entiers naturels.

a. Montrer que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$  modulo 4 .

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $k^2 + k$  est divisible par 2.

b. En déduire que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$  modulo 8 .

c. Conclure.

#### 4. 78. Similitude & suite, Am. du Sud, sept. 2005

Le plan complexe  $P$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  telles que :

$$a = i, b = 1 + 2i, c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe  $s$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ . Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$ , d'affixe  $z'$ , son image par  $s$ .

1. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ . Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ .

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  .

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude  $s$ , les termes de la suite  $(U_n)$ .

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = 2^n - 1$  .

5. Montrer que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls tels que  $n \geq p$ ,  $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$  .

La notation  $\text{pgcd}(a ; b)$  est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels  $a$  et  $b$ . Montrer pour  $n \geq p$  l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, montrer que :  $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,p)}$ . Déterminer le nombre :  $\text{pgcd}(U_{2005}, U_{15})$ .

#### 4. 79. QCM, National, sept. 2005

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :  $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$ .

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient  $x \equiv 2(6)$  .

D : les solutions vérifient  $x \equiv 2(6)$  ou  $x \equiv 5(6)$  .

2. On se propose de résoudre l'équation (E) :  $24x + 34y = 2$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :  $(x ; y) = (34k - 7 ; 5 - 24k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  .

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :  $(x ; y) = (17k - 7 ; 5 - 12k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  .

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :  $(x ; y) = (-7k ; 5k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  .

3. On considère les deux nombres  $n = 1\,789$  et  $p = 17\,89^{2\,005}$ . On a alors :

$$A : n \equiv 4(17) \text{ et } p \equiv 0(17). \quad C : p \equiv 4(17).$$

$$B : p \text{ est un nombre premier.} \quad D : p \equiv 1(17).$$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a$  et  $b$ . Le triangle  $MAB$  est rectangle isocèle direct d'hypoténuse  $[AB]$  si et seulement si le point  $M$  d'affixe  $z$  est tel que :

$$A : z = \frac{b-ia}{1-i}. \quad C : a - z = i(b - z).$$

$$B : z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a). \quad D : b - z = \frac{\pi}{2}(a - z).$$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts  $A$  et  $B$  ; on note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Soit  $f$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport 2 et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  ; soit  $g$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  ; soit  $h$  la symétrie centrale de centre  $I$ .

A :  $h \circ g \circ f$  transforme  $A$  en  $B$  et c'est une rotation.

B :  $h \circ g \circ f$  est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment  $[AB]$ .

C :  $h \circ g \circ f$  n'est pas une similitude.

D :  $h \circ g \circ f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

### **Correction**

1. Testons la réponse D : si  $x \equiv 2(6)$  alors  $x^2 - x + 4 \equiv 4 - 2 + 4(6) \equiv 6(6) \equiv 0(6)$  ; si  $x \equiv 5(6)$  alors  $x^2 - x + 4 \equiv 25 - 5 + 4(6) \equiv 24(6) \equiv 0(6)$ . Ok.

2. Simplifions par 2 :  $12x + 17y = 1$  a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fautive. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que  $-7$  et  $5$  est pas mal :  $12 \times -7 + 17 \times 5 = 1$ . Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On a  $n = 1\,789 \equiv 4(17)$  ; par ailleurs  $4^2 = 16 \equiv -1(17)$  donc  $4^{2 \times 1002 + 1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$ . Réponse C.

### **4. 80. Restes de puissances, Antilles, juin 2005**

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul  $n$  le reste dans la division euclidienne par 9 de  $7^n$ .

b. Démontrer alors que  $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$ .

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $(10)^n \equiv 1(9)$ .

b. On désigne par  $N$  un entier naturel écrit en base dix, on appelle  $S$  la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante :  $N \equiv S(9)$ .

c. En déduire que  $N$  est divisible par 9 si et seulement si  $S$  est divisible par 9.

3. On suppose que  $A = (2005)^{2005}$  ; on désigne par :

–  $B$  la somme des chiffres de  $A$  ;

–  $C$  la somme des chiffres de  $B$  ;

–  $D$  la somme des chiffres de  $C$ .

a. Démontrer la relation suivante :  $A \equiv D(9)$ .

b. Sachant que  $2005 < 10000$ , démontrer que  $A$  s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que  $B \leq 72180$ .

c. Démontrer que  $C \leq 45$ .

- d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de  $D$  plus petit que 15.  
 e. Démontrer que  $D = 7$ .

4. 81. Eq. dioph., Centres étrangers, juin 2005 (c)

**Partie A**

Soit  $N$  un entier naturel, impair non premier. On suppose que  $N = a^2 - b^2$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels.

1. Montrer que  $a$  et  $b$  n'ont pas la même parité.
2. Montrer que  $N$  peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels  $p$  et  $q$ .
3. Quelle est la parité de  $p$  et de  $q$  ?

**Partie B**

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels  $(a ; b)$  vérifiant la relation (E) :  $a^2 - 250\,507 = b^2$ .

1. Soit  $X$  un entier naturel.
  - a. Donner dans un tableau, les restes possibles de  $X$  modulo 9 ; puis ceux de  $X^2$  modulo 9.
  - b. Sachant que  $a^2 - 250\,507 = b^2$ , déterminer les restes possibles modulo 9 de  $a^2 - 250\,507$  ; en déduire les restes possibles modulo 9 de  $a^2$ .
  - c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de  $a$  sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple  $(a ; b)$  vérifie la relation (E), alors  $a \geq 501$ . Montrer qu'il n'existe pas de solution du type  $(501 ; b)$ .
3. On suppose que le couple  $(a ; b)$  vérifie la relation (E).
  - a. Démontrer que  $a$  est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
  - b. Déterminer le plus petit entier naturel  $k$  tel que le couple  $(505+9k ; b)$  soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

*Partie C*

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

**Correction**

*Partie A*

1.  $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  :

s'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;  
 s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;  
 comme  $N$  est impair,  $a$  et  $b$  n'ont pas la même parité.

2. Evident :  $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = pq$ .

3. Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

*Partie B*

1. a.

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X^2$	0	1	4	0	-2 = 7	-2 = 7	0	4	1
$X^2 - 1$	-1 = 8	0	3	-1 = 8	6	6	-1 = 8	3	0

b. On a  $250\,507 = 27\,834 \cdot 9 + 1$ , donc les restes possibles modulo 9 de  $a^2 - 250\,507$  sont ceux de  $X^2 - 1$ .

c. Comme  $a^2 - 250\,507 = b^2$ , les restes doivent être égaux modulo 9, on a  $a^2 \equiv b^2 + 1(9)$  ;

\*si on prend  $b \equiv 0(9)$  alors  $a^2 \equiv 1(9) \Rightarrow a \equiv 1(9)$  ou  $a \equiv 8(9)$ ,

\*si on prend  $b \equiv 1(9)$  alors  $a^2 \equiv 2(9)$ , ce qui est impossible,

\*si on prend  $b \equiv 2(9)$  alors  $a^2 \equiv 5(9)$ , ce qui est impossible, etc.

2. On a  $a^2 - 250507 = b^2$  d'où  $a^2 = 250507 + b^2 \geq 250507 = (500, \dots)^2 \geq 501^2$  donc  $a \geq 501$ . Si on avait une solution du type  $(501; b)$ , on aurait  $251001 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 494$  or 494 n'est pas un carré parfait.

3. a.  $a$  est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501, lequel est congru à 6 mod 9 ; on peut donc prendre  $503 \equiv 8(9)$  ou  $505 \equiv 1(9)$ .

b. Le plus simple est de faire quelques essais :

$a$	$a^2 - 250507$	$\sqrt{a^2 - \dots}$
505	4518	67,2160695
514	13689	117
523	23022	151,730023
532	32517	180,324707
541	42174	205,363093
550	51993	228,019736
559	61974	248,945777
568	72117	268,546085
577	82422	287,09232

On a donc la première solution pour  $k = 1$ , ce qui donne la solution  $(514, 117)$ .

Partie C

1. On a  $250507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397.631$ .

2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$u$	$v$	quotient	reste
631	397	1	234
397	234	1	163
234	163	1	71
163	71	2	21
71	21	3	8
21	8	2	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1

Le PGCD est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.

3. Cette écriture ne sera pas unique (mis à part  $p = 1, q = 250507$ , par exemple) si 397 n'est pas un nombre premier. Or 397 est premier, la décomposition est bien unique.

#### 4. 82. Bézout+Fermat, Liban, juin 2005

1. On considère l'équation (E) :  $109x - 226y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme  $(141+226k, 68+109k)$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul  $d$  inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul  $e$  tels que  $109d = 1+226e$ . (On précisera les valeurs des entiers  $d$  et  $e$ .)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note  $A$  l'ensemble des 227 entiers naturels  $a$  tels que  $a \leq 226$ .

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $A$  dans  $A$  définies de la manière suivante :

à tout entier de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{109}$  par 227 ;

à tout entier de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{141}$  par 227.

a. Vérifier que  $g[f(0)] = 0$ .

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

**Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$  alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .**

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$ .

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $g[f(a)] = a$ .

Que peut-on dire de  $f[g(a)] = a$  ?

#### 4. 83. Suite de restes, Polynésie, juin 2005 (c)

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par  $u_0 = 14$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 6$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$  ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$ . En déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,

$$u_{2k} \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}.$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n = 5^{n+2} + 3$ .

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$ .

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  est constant. Préciser sa valeur.

#### **Correction**

1. On calcule  $u_1 = 64$ ,  $u_2 = 314$ ,  $u_3 = 1564$ ,  $u_4 = 7814$ .

On peut conjecturer que  $u_{2k} \equiv \dots 14$  et  $u_{2k+1} \equiv \dots 64$ .

2.  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n + 36$ . Or  $24u_n + 36 \equiv 0 \pmod{4}$ , donc

$$u_{n+2} \equiv (u_n + 24u_n + 36) \pmod{4} \equiv (u_n + 0) \pmod{4} \equiv u_n \pmod{4}.$$

On en déduit par récurrence que  $u_{2k} \equiv u_0 \pmod{4}$  or  $u_0 \equiv 2 \pmod{4}$  donc, pour tout naturel  $k$ ,  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ .

De même  $u_{2k+1} \equiv u_1 \pmod{4}$  or  $u_1 = 64 \equiv 0 \pmod{4}$  donc, pour tout naturel  $k$ ,  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ .

3. a. Au rang 0 :  $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$  : vrai.

Supposons que pour l'entier  $n$ , on ait  $2u_n = 5^{n+2} + 3$  alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3.$$

La relation est donc vraie au rang  $n + 1$ .

b. On a  $2u_n = 5^{n+2} + 3$  or  $5^n \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25 \pmod{100}$  en multipliant tout par 25 ; finalement  $2u_n \equiv (25 + 3) \pmod{100} \equiv 28 \pmod{100}$ .

4. La relation précédente donne  $u_n = 14 + 50k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ; mais comme  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$  et que  $14 \equiv 2 \pmod{4}$ , il faut  $50k \equiv 0 \pmod{4}$  et donc lorsque  $k$  est pair  $u_k \equiv 14 \pmod{100}$ , lorsque  $k$  est impair  $u_k \equiv 14 + 50 \pmod{100} \equiv 64 \pmod{100}$ .

5. On voit que le PGCD de 14 et 64 est 2 ; il faut donc montrer que c'est le cas. Comme on a  $5u_n - u_{n+1} = 6$ , la relation de Bézout montre que  $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n)$  est un diviseur de 6. Or 3 divise 3 mais pas 5 donc 3 ne divise pas  $2u_n = 5^{n+2} + 3$ . Conclusion :  $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = 2$ .

#### 4. 84. PGCD dans suite, La Réunion, juin 2005

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :



« Étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$  non nuls, si  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  alors  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$  ».

Une suite  $(S_n)$  est définie pour  $n > 0$  par  $S_n = \sum_{p=1}^n p^3$ . On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , le plus grand commun diviseur de  $S_n$  et  $S_{n+1}$ .

1. Démontrer que, pour tout  $n > 0$ , on a :  $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

2. Étude du cas où  $n$  est pair. Soit  $k$  l'entier naturel non nul tel que  $n = 2k$ .

a. Démontrer que  $\text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2; (k+1)^2)$ .

b. Calculer  $\text{PGCD}(k; k+1)$ .

c. Calculer  $\text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1})$ .

3. Étude du cas où  $n$  est impair. Soit  $k$  l'entier naturel non nul tel que  $n = 2k+1$ .

a. Démontrer que les entiers  $2k+1$  et  $2k+3$  sont premiers entre eux.

b. Calculer  $\text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ .

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de  $n$ , que l'on déterminera, pour laquelle  $S_n$  et  $S_{n+1}$  sont premiers entre eux.

#### 4.85. Fibonacci, Nulle-Calédonie, nov 2004 (c)

Dans cet exercice  $a$  et  $b$  désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au+bv=1$  alors les nombres  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

b. En déduire que si  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$  alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs  $(a; b)$  tels que  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ . Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer  $a$  lorsque  $a = b$ .

b. Vérifier que  $(1; 1)$ ,  $(2; 3)$  et  $(5; 8)$  sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si  $(a; b)$  est solution et si  $a < b$ , alors  $a^2 - b^2 < 0$ .

3. a. Montrer que si  $(x; y)$  est une solution différente de  $(1; 1)$  alors  $(y-x; x)$  et  $(y; y+x)$  sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 0$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .

Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,  $(a_n; a_{n+1})$  est solution. En déduire que les nombres  $a_n$  et  $a_{n+1}$  sont premiers entre eux.

#### **Correction**

1. a. Démonstration de cours.

b.  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab - b^2 = 1 \\ a^2 + ab - b^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+b) - b \times b = 1 \\ b(b-a) - a \times a = 1 \end{cases}$ . Dans les deux cas on peut écrire

$au+bv=1$  : dans le premier  $u = a+v, v = -b$ , dans le second  $u = b-a, v = -a$ .

2. a.  $a = b$  :  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1 \Leftrightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a = 1$  ( $a > 0$ ).

b.  $(1; 1)$  est déjà fait,  $(2; 3)$  :  $(2^2 + 2 \cdot 3 - 3^2)^2 = 1$  et  $(5; 8)$  :  $(5^2 + 5 \cdot 8 - 8^2)^2 = (25 + 40 - 64)^2 = 1$ .

c.  $a^2 + ab - b^2 = 1$  : si on a  $a^2 - b^2 > 0$ , alors  $a^2 + ab - b^2$  ne peut pas valoir 1 ; de même  $a^2 + ab - b^2$  ne peut valoir  $-1$  dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a  $a^2 - b^2 < 0$ .

3. a.  $(y-x; x)$  est une solution ssi  $(x; y)$  est une solution :

$$\left( (y-x)^2 + (y-x)x - x^2 \right)^2 = \left( y^2 - 2xy + x^2 + xy - x^2 - x^2 \right)^2 = \left( y^2 - xy + x^2 \right)^2 = 1 ;$$

Même calcul pour  $(y; y+x)$ .

b.  $(2; 3)$  est solution donc  $(3-2; 2) = (1; 2)$  et  $(3; 3+2) = (3; 5)$  en sont ;  $(5; 8)$  est solution donc  $(8-5; 5) = (3; 5)$  et  $(8; 5+8) = (8; 13)$  en sont ; on a les nouvelles solutions :  $(1; 2)$ ,  $(3; 5)$  et  $(8; 13)$ .

4.  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ . Démonstration par récurrence : supposons que  $(a_n; a_{n+1})$  est solution, alors  $(y; y+x) = (a_{n+1}; a_n + a_{n+1}) = (a_{n+1}; a_{n+2})$  est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 :  $(1; 1)$  est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres  $a_n$  et  $a_{n+1}$  sont premiers entre eux.

Remarque : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient  $u_{n+1}$  et  $u_n$  deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ; soit  $d$  un diviseur commun positif de  $u_{n+1}$  et  $u_n$ ; alors  $d$  divise  $u_{n-1}$ , donc  $d$  est un diviseur commun de  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .

En itérant (et en descendant), il vient :  $d$  est un diviseur commun de  $u_1 = 1$  et  $u_0 = 1$  donc  $d = 1$  et  $u_{n+1}$  et  $u_n$  sont premiers entre eux.

#### 4. 86. QCM, Antilles, sept 2004 (c)

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fautive, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels non nuls,  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$  et par  $2^q - 1$ .

3. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $2^n - 1$  n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :  $24x + 35y = 9$  est l'ensemble des couples :  $(-144 + 70k; 99 - 24k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note  $f$  l'homothétie de centre A et de rapport 3 et  $g$  l'homothétie de centre B et de rapport  $\frac{1}{3}$  alors  $g \circ f$  est la translation de vecteur  $\overline{AB}$ .

6. Soit  $s$  la similitude d'écriture complexe  $z' = iz + (1-i)$ , l'ensemble des points invariants de  $s$  est une droite.

#### Correction

1. **Vrai** :  $4\ 002 = 2\ 004 \times 1 + 1\ 998$  ;  $2\ 004 = 1\ 998 \times 1 + 6$  ;  $1\ 998 = 6 \times 336$ . Le dernier reste non nul est bien 6.

2. **Vrai** :  $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p)^q - 1$  ; or  $a^m - 1 = (a-1)(a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + 1)$ .

3. **Faux** : contre-exemple :  $2^6 - 1 = 63$  est divisible par 9.

4. **Faux** : les méthodes habituelles donnent les solutions  $(35k - 144; 99 - 24k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

5. **Faux** : soit  $M$  un point du plan ; son image  $M_1$  par  $f$  vérifie  $\overline{AM_1} = 3\overline{AM}$ . Puis l'image  $M'$  de  $M_1$  par  $g$  vérifie  $\frac{1}{3}\overline{BM_1} = \overline{MA} + \overline{AB} + \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{AM_1}) = \overline{MA} + \overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3} \times 3\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ .

6. **Vrai** : les points invariants vérifient  $z = iz + (1-i)$ , soit avec  $z = x + iy$ ,  $x + iy = ix - y + 1 - i$ , soit  $x + y - 1 + i(y - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$  qui est bien l'équation d'une droite.

#### 4. 87. Congruences, Asie, juin 2004

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme  $9 + a^2$  où  $a$  est un entier naturel non nul ; par exemple  $10 = 9 + 1^2$  ;  $13 = 9 + 2^2$  etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue  $a : a^2 + 9 = 2^n$  où  $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$ .

a. Montrer que si  $a$  existe,  $a$  est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue  $a : a^2 + 9 = 3^n$  où  $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$ .

a. Montrer que si  $n \geq 3$ ,  $3^n$  est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si  $a$  existe, il est pair et en déduire que nécessairement  $n$  est pair.

c. On pose  $n = 2p$  où  $p$  est un entier naturel,  $p \geq 2$ . Déduire d'une factorisation de  $3^n - a^2$ , que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue  $a : a^2 + 9 = 5^n$  où  $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ .

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si  $n$  est impair.

b. On pose  $n = 2p$ , en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel  $a$  tel que  $a^2 + 9$  soit une puissance entière de 5.

#### 4. 88. Répunit, Centres étrangers, juin 2004

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? »

Pour tout entier naturel  $p \geq 2$ , on pose  $N_p = 1\dots 1$  où 1 apparaît  $p$  fois.

On rappelle dès lors que  $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$ .

1. Les nombres  $N_2 = 11, N_3 = 111, N_4 = 1111$  sont-ils premiers ?

2. Prouver que  $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$ . Peut-on être certain que  $10^p - 1$  est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si  $p$  n'est pas premier, alors  $N_p$  n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel  $x$  et tout entier naturel  $n$  non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)$$

a. On suppose que  $p$  est pair et on pose  $p = 2q$ , où  $q$  est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que  $N_p$  est divisible par  $N_2 = 11$ .

b. On suppose que  $p$  est multiple de 3 et on pose  $p = 3q$ , où  $q$  est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que  $N_p$  est divisible par  $N_3 = 111$ .

c. On suppose  $p$  non premier et on pose  $p = kq$  où  $k$  et  $q$  sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que  $N_p$  est divisible par  $N_k$ .

4. Énoncer une condition nécessaire pour que  $N_p$  soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

#### 4. 89. Fermat et Bézout, National, juin 2004 (c)

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  et pour tout entier naturel  $x$  :

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier  $a$  supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n : n = dk$ . Montrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$ .

b. Déduire de la question précédente que  $2^{2004} - 1$  est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls et  $d$  leur PGCD.

a. On définit  $m'$  et  $n'$  par  $m = dm'$  et  $n = dn'$ . En appliquant le théorème de Bézout à  $m'$  et  $n'$ , montrer qu'il existe des entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $mu - nv = d$ .

b. On suppose  $u$  et  $v$  strictement positifs. Montrer que  $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$ . Montrer ensuite que  $a^d - 1$  est le PGCD de  $a^{mu} - 1$  et de  $a^{nv} - 1$ .

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de  $2^{63} - 1$  et de  $2^{60} - 1$ .

### **Correction**

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe  $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = (x+x^2+\dots+x^k) - (1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1$ .

2. a.  $n = dk$ . Remplaçons  $x$  par  $a^d$  dans la relation précédente :

$$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{d(k-1)}) = a^{dk} - 1 = a^n - 1.$$

$a^d - 1$  est en facteur dans  $a^n - 1$ , c'en est bien un diviseur.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 :  $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$  donc  $2^{2004} - 1$  est divisible par  $2^2 - 1 = 3$ ,  $2^3 - 1 = 7$ ,  $2^4 - 1 = 15$ ,  $2^6 - 1 = 63$ ,  $2^{12} - 1 = 4095, \dots$   $2^{2004} - 1$  est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également  $2^{2004} - 1$ .

3. a. Bézout dit :  $m'$  et  $n'$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe  $u$  et  $v$  tels que  $um' + vn' = 1$  (ou  $um' - vn' = 1$ ). On multiplie tout par  $d$  :  $udm' + vdn' = d$ , soit  $um + vn = d$  (ou  $um - vn = d$ ).

b. Développons :

$$a^{mu} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^d - 1 \Leftrightarrow a^{mu} - a^{nv+d} = 0 \Leftrightarrow a^{mu} = a^{nv+d} \Leftrightarrow mu = nv + d \Leftrightarrow mu - nv = d.$$

Divisons la relation  $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$  par  $D = a^d - 1$  :  $\left(\frac{a^{mu} - 1}{a^d - 1}\right) - \left(\frac{a^{nv} - 1}{a^d - 1}\right)a^d = 1$  ; ceci

montre qu'il existe deux entiers tels que  $1.A - a^d.B = D$  où  $A = \frac{a^{mu} - 1}{a^d - 1}$  et  $B = \frac{a^{nv} - 1}{a^d - 1}$ .  $A$  et  $B$  sont donc premiers entre eux et  $D$  est le PGCD de  $A$  et  $B$ .

c. Le PGCD de  $2^{63} - 1$  et de  $2^{60} - 1$  est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est  $d = 3$ . On a alors  $1 \cdot 63 - 1 \cdot 60 = 3$  d'où en prenant  $a = 2$  :  $A = 2^{63} - 1$ ,  $B = 2^{60} - 1$  et  $D = 2^3 - 1 = 7$ .

### **4. 90. Fermat, La Réunion, juin 2004**

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$  ; alors  $a^{p-1} - 1$  est divisible par  $p$  ».

1. Soit  $p$  un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel  $k$ , non nul, tel que  $2^k \equiv 1(p)$ .

b. Soit  $k$  un entier naturel non nul tel que  $2^k \equiv 1(p)$  et soit  $n$  un entier naturel. Montrer que, si  $k$  divise  $n$ , alors  $2^n \equiv 1(p)$ .

c. Soit  $b$  tel que  $2^b \equiv 1(p)$ ,  $b$  étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $b$ , que si  $2^n \equiv 1(p)$ , alors  $b$  divise  $n$ .

2. Soit  $q$  un nombre premier impair et le nombre  $A = 2^q - 1$ . On prend pour  $p$  un facteur premier de  $A$ .

a. Justifier que :  $2^q \equiv 1(p)$ .

b. Montrer que  $p$  est impair.

c. Soit  $b$  tel que  $2^b \equiv 1(p)$ ,  $b$  étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que  $b$  divise  $q$ . En déduire que  $b = q$ .

d. Montrer que  $q$  divise  $p - 1$ , puis montrer que  $p \equiv 1(2q)$ .

3. Soit  $A_1 = 2^{17} - 1$ . Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme  $34m + 1$ , avec  $m$  entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que  $A_1$  est premier.

4. 91. Restes chinois + plan, N. Calédonie, sept 2003

1. a. Soit  $p$  un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres  $p$ ,  $p + 10$  et  $p + 20$ , et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit  $E$  l'ensemble des triplets d'entiers relatifs  $(u, v, w)$  tels que  $3u + 13v + 23w = 0$ .

a. Montrer que pour un tel triplet  $v \equiv w \pmod{3}$ .

b. On pose  $v = 3k + r$  et  $w = 3k' + r$  où  $k$ ,  $k'$  et  $r$  sont des entiers relatifs et  $0 \leq r \leq 2$ . Montrer que les éléments de  $E$  sont de la forme :  $(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r)$ .

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine  $O$  et soit  $P$  le plan d'équation  $3x + 13y + 23z = 0$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M$  à coordonnées  $(x, y, z)$  entières relatives appartenant au plan  $P$  et situés à l'intérieur du cube de centre  $O$ , de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

4. 92. Eq. dioph., Antilles, sept 2003

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle  $x$  :  $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$  où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que  $\frac{14}{39}$  est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs  $u$  et  $v$  sont liés par la relation  $14u + 39v = 1129$ .

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple  $(x ; y)$  d'entiers relatifs vérifiant l'équation  $14x + 39y = 1$ . Vérifier que le couple  $(-25 ; 9)$  est solution de cette équation.

c. En déduire un couple  $(u_0 ; v_0)$  solution particulière de l'équation  $14u + 39v = 1129$ . Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples  $(u ; v)$  d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples  $(u ; v)$  précédents, celui pour lequel le nombre  $u$  est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans  $\square$ , l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit  $\frac{p}{q}$  une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue  $x$  :  $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$  où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs. Montrer que si  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors  $p$  divise 14 et  $q$  divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

4. 93. Bézout, France, sept 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :  $123u + 2003v = 1$ .

b. En déduire un entier relatif  $k_0$  tel que :  $123k_0 \equiv 1[2003]$ .

c. Montrer que, pour tout entier relatif  $x$ ,  $123x \equiv 456[2003]$  si et seulement si  $x \equiv 456k_0[2003]$ .

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $x$  tels que :  $123x \equiv 456[2003]$ .

e. Montrer qu'il existe un unique entier  $n$  tel que :  $1 \leq n \leq 2002$  et  $123n \equiv 456[2003]$ .

2. Soit  $a$  un entier tel que :  $1 \leq a \leq 2002$ .

a. Déterminer  $\text{PGCD}(a ; 2003)$ . En déduire qu'il existe un entier  $m$  tel que :  $am \equiv 1[2003]$ .

b. Montrer que, pour tout entier  $b$ , il existe un unique entier  $x$  tel que :  $1 \leq x \leq 2002$  et  $ax \equiv b[2003]$ .

4. 94. Congruences, Polynésie, sept 2003

On désigne par  $p$  un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel  $n = p^4 - 1$  est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que  $p$  est congru à  $-1$  ou à  $1$  modulo 3. En déduire que  $n$  est divisible par 3.
2. En remarquant que  $p$  est impair, prouver qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ , puis que  $n$  est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de  $p$  par 5, démontrer que 5 divise  $n$ .
4. a. Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers naturels. Démontrer que si  $a$  divise  $c$  et  $b$  divise  $c$ , avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux, alors  $ab$  divise  $c$ .
- b. Déduire de ce qui précède que 240 divise  $n$ .
5. Existe-t-il quinze nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{15}$  supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$$

soit un nombre premier ?

#### 4.95. Suite. Antilles, juin 2003 (c)

1. a. Calculer :  $(1 + \sqrt{6})^2, (1 + \sqrt{6})^4, (1 + \sqrt{6})^6$ .
- b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $a_n$  et  $b_n$  les entiers naturels tels que :  $(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$ .
  - a. Que valent  $a_1$  et  $b_1$  ? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de  $a_n$  et  $b_n$ .
  - b. Calculer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .
  - c. Démontrer que, si 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ , alors 5 ne divise pas non plus  $a_{n+1} + b_{n+1}$ . En déduire que, quel que soit  $n$  entier naturel non nul, 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ .
  - d. Démontrer que, si  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux, alors  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit  $n$  entier naturel non nul,  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux.

#### Correction

1. a.  $(1 + \sqrt{6})^2 = 1 + 2\sqrt{6} + 6 = 7 + 2\sqrt{6}$ ,  $(1 + \sqrt{6})^4 = (7 + 2\sqrt{6})^2 = 73 + 28\sqrt{6}$ ,  
 $(1 + \sqrt{6})^6 = (73 + 28\sqrt{6})(7 + 2\sqrt{6}) = 847 + 342\sqrt{6}$ .
- b.  $847 = 342 \times 2 + 163$ ;  $342 = 163 \times 2 + 16$ ;  $163 = 16 \times 10 + 3$ ;  $16 = 3 \times 5 + 1$  donc 847 et 342 sont premiers entre eux.
2.  $(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$ .
  - a.  $a_1 = 1, b_1 = 1$ ;  $a_2 = 7, b_2 = 2$ ;  $a_3 = 73, b_3 = 28$ , etc.
  - b.  $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} = (a_n + b_n\sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) = a_n + 6b_n + (a_n + b_n)\sqrt{6}$  donc  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ .
  - c.  $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$ ; comme  $5b_n$  est divisible par 5, si 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ , alors 5 ne divise pas non plus  $a_{n+1} + b_{n+1}$ . Par ailleurs 5 ne divise pas  $a_1 + b_1 = 2$  donc par récurrence 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ .
  - d.  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases}$ .

Comme il est clair que  $a_n$  et  $b_n$  sont entiers,  $a_{n+1} - b_{n+1}$  et  $6b_{n+1} - a_{n+1}$  sont divisibles par 5.

Si  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  ne sont pas premiers entre eux, il existe  $k$  tel que  $a_{n+1} = k\alpha$ ,  $b_{n+1} = k\beta$  ( $k$  ne peut être un multiple de 5 sinon il se mettrait en facteur dans  $a_n + b_n$  qui serait alors divisible par 5). Remplaçons :

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b_n = k(\alpha - \beta) \\ 5a_n = k(6\beta - \alpha) \end{cases} \text{ d'où } a_n \text{ et } b_n \text{ ont un facteur commun ce qui est contradictoire.}$$

Par ailleurs  $a_2$  et  $b_2$  sont premiers entre eux donc par récurrence  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux.

#### 4. 96. PGCD, Asie, juin 2003

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^3 - 11n + 48$  est divisible par  $n + 3$ .
- b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^2 - 9n + 16$  est un entier naturel non nul.
2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$ , l'égalité suivante est vraie :  

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(bc - a ; b).$$
3. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :  

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3).$$
4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
- b. En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$  soit un entier naturel.

#### 4. 97. Congruences, Liban, mai 2003

Les suites d'entiers naturels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} x_0 = 3, x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1, y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n = 2^{n+1} + 1$ .
2. a. Calculer le PGCD de  $x^8$  et  $x^9$ , puis celui de  $x^{2002}$  et  $x^{2003}$ . Que peut-on en déduire pour  $x^8$  et  $x^9$  d'une part, pour  $x^{2002}$  et  $x^{2003}$  d'autre part ?
- b.  $x_n$  et  $x_{n+1}$  sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel  $n$  ?
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2x_n - y_n = 5$ .
- b. Exprimer  $y_n$  en fonction de  $n$ .
- c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel  $p$  le reste de la division euclidienne de  $2^p$  par 5.
- d. On note  $d_n$  le PGCD de  $x_n$  et  $y_n$  pour tout entier naturel  $n$ . Démontrer que l'on a  $d_n = 1$  ou  $d_n = 5$  ; en déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $x_n$  et  $y_n$  soient premiers entre eux.

#### 4. 98. Repunit, Am. du Sud, décembre 2002

On considère la suite d'entiers définie par  $a_n = 111 \dots 11$  (l'écriture décimale de  $a_n$  est composée de  $n$  chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant  $a_n$  sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$ .
2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.  
Soit  $a_n$  et  $a_p$  deux termes de la suite admettant le même reste ( $n < p$ ). Quel est le reste de la division euclidienne de  $a_p - a_n$  par 2001 ?
3. Soit  $k$  et  $m$  deux entiers strictement positifs vérifiant  $k < m$ .  
Démontrer l'égalité :  $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$ .
4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. Montrer que si 2001 divise  $a_m - a_k$ , alors 2001 divise  $a_{m-k}$ .
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.



4. 99. Eq. dioph., N. Calédonie, nov. 2002

On considère deux entiers naturels, non nuls,  $x$  et  $y$  premiers entre eux.

On pose  $S = x + y$  et  $P = xy$ .

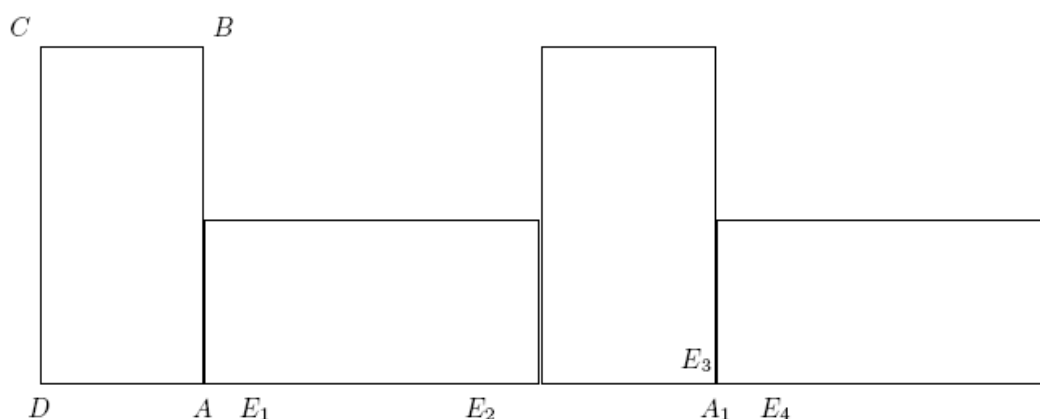
1. a. Démontrer que  $x$  et  $S$  sont premiers entre eux, de même que  $y$  et  $S$ .
- b. En déduire que  $S = x + y$  et  $P = xy$  sont premiers entre eux.
- c. Démontrer que les nombres  $S$  et  $P$  sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux  $x$  et  $y$  tels que :  $SP = 84$ .
4. Déterminer les deux entiers naturels  $a$  et  $b$  vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a ; b)$$

(on pourra poser  $a = dx$  et  $b = dy$  avec  $x$  et  $y$  premiers entre eux).

4. 100. Bézout+rotation, France, sept. 2002

On considère un rectangle direct  $ABCD$  vérifiant :  $AB = 10$  cm et  $AD = 5$  cm.



1. Faire une figure : construire  $ABCD$ , puis les images respectives  $M$ ,  $N$  et  $P$  de  $B$ ,  $C$  et  $D$  par la rotation  $r$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
2. a. Construire le centre  $\Omega$  de la rotation  $r'$  qui vérifie  $r'(A) = N$  et  $r'(B) = P$ . Déterminer l'angle de  $r'$ .
- b. Montrer que l'image de  $ABCD$  par  $r'$  est  $AMNP$ .
- c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $r^{-1} \circ r'$ .
3. On considère les images successives des rectangles  $ABCD$  et  $AMNP$  par la translation de vecteur  $\overline{DM}$ . Sur la demi-droite  $[DA)$ , on définit ainsi la suite de points  $(A_k)$ ,  $k > 1$ , vérifiant, en cm,  $DA_k = 5 + 15k$ . Sur la même demi-droite, on considère la suite de points  $(E_n)$ ,  $n > 1$ , vérifiant, en cm,  $DE_n = 6,55n$ .
- a. Déterminer l'entier  $k$  tel que  $E_{120}$  appartienne à  $[A_k, A_{k+1}]$ . Que vaut la longueur  $A_kE_{120}$  en cm ?
- b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale  $n_0$  le point  $E_{n_0}$  est confondu avec un point  $A_k$ .  
Montrer que si un point  $E_n$  est confondu avec un point  $A_k$  alors  $131n - 300k = 100$ .  
Vérifier que les nombres  $n = 7100$  et  $k = 3100$  forment une solution de cette équation.  
Déterminer la valeur minimale  $n_0$  recherchée.

#### 4. 101. Bézout & suites, Asie, juin 2002

On considère les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies par  $x_0 = 1, y_0 = 8$  et 
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer, par récurrence, que les points  $M_n$  de coordonnées  $(x_n; y_n)$  sont sur la droite  $(\Delta)$  dont une équation est  $5x - y + 3 = 0$ . En déduire que  $x_{n+1} = 4x_n + 2$ .

2. Montrer, par récurrence, que tous les  $x_n$  sont des entiers naturels. En déduire que tous les  $y_n$  sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a.  $x_n$  est divisible par 3 si et seulement si  $y_n$  est divisible par 3.

b. Si  $x_n$  et  $y_n$  ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer, par récurrence, que  $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$ .

b. En déduire que  $4^n \times 5 - 2$  est un multiple de 3, pour tout entier naturel  $n$ .

#### 4. 102. Triplets pythag., C. étrangers, juin 2002

Soit  $p$  un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples  $(x; y)$  d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$(E) : x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose  $p = 2$ . Montrer que l'équation (E) est sans solution.

On suppose désormais que  $p$  est différent de 2 et que le couple  $(x; y)$  est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux.

a. Montrer que  $x$  et  $y$  sont de parités différentes.

b. Montrer que  $x$  et  $y$  ne sont pas divisibles par  $p$ .

c. En déduire que  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que  $p$  est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire :  $p = u^2 + v^2$  où  $u$  et  $v$  sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple  $(|u^2 - v^2|; 2uv)$  est solution de l'équation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E), lorsque  $p = 5$  puis lorsque  $p = 13$ .

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque  $p$  n'est pas somme de deux carrés.

a.  $p = 3$  et  $p = 7$  sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations  $x^2 + y^2 = 9$  et  $x^2 + y^2 = 49$  n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

#### 4. 103. Bézout, France, juin 2002

1. On considère l'équation (E) :  $6x + 7y = 57$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  tel que  $6u + 7v = 1$ ; en déduire une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation :  $6x + 7y + 8z = 57$ .

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point  $M$  du plan (P) dont les coordonnées  $x, y$  et  $z$  sont des entiers naturels.

- a. Montrer que l'entier  $y$  est impair.  
 b. On pose  $y = 2p + 1$  où  $p$  est un entier naturel.  
 Montrer que le reste dans la division euclidienne de  $p + z$  par 3 est égal à 1.  
 c. On pose  $p + z = 3q + 1$  où  $q$  est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels  $x, p$  et  $q$  vérifient la relation :  $x + p + 4q = 7$ .  
 En déduire que  $q$  prend les valeurs 0 ou 1.  
 d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

**4. 104. PGCD, Polynésie, juin 2002**

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que  $n$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux.  
 2. On pose  $\alpha = n + 3$  et  $\beta = 2n + 1$  et on note  $\delta$  le PGCD de  $\alpha$  et  $\beta$ .  
 a. Calculer  $2\alpha - \beta$  et en déduire les valeurs possibles de  $\delta$ .  
 b. Démontrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont multiples de 5 si et seulement si  $(n - 2)$  est multiple de 5.

3. On considère les nombres  $a$  et  $b$  définis par : 
$$\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$$

Montrer, après factorisation, que  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels divisibles par  $(n - 1)$ .

4. a. On note  $d$  le PGCD de  $n(n + 3)$  et de  $(2n + 1)$ . Montrer que  $\delta$  divise  $d$ , puis que  $\delta = d$ .  
 b. En déduire le PGCD,  $\Delta$ , de  $a$  et  $b$  en fonction de  $n$ .  
 c. Application : Déterminer  $\Delta$  pour  $n = 2001$  ; déterminer  $\Delta$  pour  $n = 2002$ .

**4. 105. Calendrier, Am. du Nord, mai 2002**

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme  $abba$  où  $a$  est un chiffre supérieur ou égal à 2 et  $b$  est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et

B peuvent être traitées séparément.

**Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.**

1. a. Montrer que si un nombre entier  $n$  n'a pas de diviseur premier inférieur à  $\sqrt{n}$  alors il n'en a pas de supérieur à  $\sqrt{n}$ .  
 1. b. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.  
 c. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.  
 2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?  
 b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?  
 3. Soit  $n$  un élément de (E) s'écrivant sous la forme  $abba$ .  
 a. Montrer que : «  $n$  est divisible par 3 » équivaut à «  $a + b$  est divisible par 3 ».  
 b. Montrer que : «  $n$  est divisible par 7 » équivaut à «  $b$  est divisible par 7 ».  
 4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

**Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.**

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément  $n$  de (F), il existe des entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que :

$$n = 2000 + 4p \text{ et } n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) :  $4p - 11q = 2$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs.  
 Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).  
 2. En déduire que tout entier  $n$  de (F) peut s'écrire sous la forme  $2024 + 44k$  où  $k$  est un entier relatif.  
 3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

4. 106. Divisibilité, N. Calédonie, déc. 2001

**Partie I**

Soit  $x$  un nombre réel.

1. Montrer que  $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$ .

2. En déduire que  $x^4 + 4$  peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

**Partie II**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers  $A = n^2 - 2n + 2$  et  $B = n^2 + 2n + 2$  et  $d$  leur PGCD.

1. Montrer que  $n^4 + 4$  n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de  $A$  qui divise  $n$ , divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de  $A$  et  $B$ , divise  $4n$ .

4. Dans cette question on suppose que  $n$  est impair.

a. Montrer que  $A$  et  $B$  sont impairs. En déduire que  $d$  est impair.

b. Montrer que  $d$  divise  $n$ .

c. En déduire que  $d$  divise 2, puis que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que  $n$  est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas  $n^2 - 2n + 2$ .

b. Montrer que  $d$  est de la forme  $d = 2p$ , où  $p$  est impair.

c. Montrer que  $p$  divise  $n$ . En déduire que  $d = 2$ . (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

4. 107. PGCD & PPCM, Antilles, sept 2001

1. Soient  $a$  et  $b$  des entiers naturels non nuls tels que  $\text{PGCD}(a + b ; ab) = p$ , où  $p$  est un nombre premier.

a. Démontrer que  $p$  divise  $a^2$ . (On remarquera que  $a^2 = a(a + b) - ab$ ).

b. En déduire que  $p$  divise  $a$ .

On constate donc, de même, que  $p$  divise  $b$ .

c. Démontrer que  $\text{PGCD}(a ; b) = p$ .

2. On désigne par  $a$  et  $b$  des entiers naturels tels que  $a \leq b$ .

a. Résoudre le système  $\begin{cases} \text{PGCD}(a ; b) = 5 \\ \text{PPCM}(a ; b) = 170 \end{cases}$ .

b. En déduire les solutions du système :  $\begin{cases} \text{PGCD}(a + b ; ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a ; b) = 170 \end{cases}$ .

4. 108. PGCD, Am. du Sud, sept 2001

4 points

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère les nombres  $a$  et  $b$  tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que  $2n + 1$  divise  $a$  et  $b$ .

2. Un élève affirme que le PGCD de  $a$  et  $b$  est  $2n + 1$ . Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (La réponse sera justifiée.)

4. 109. Similitude & Bézout, France, juin 2001

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation  $f$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M_0$  d'affixe  $z_0$  définie par  $z_0 = e^{\frac{i5\pi}{6}}$  et on définit une suite de points  $(M_n)$  de la manière suivante :

$M_0$  a pour affixe  $z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = f(M_n)$ . On appelle  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ . Placer les points  $M_0, M_1, M_2$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité  $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$  (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
3. Soient deux entiers  $n$  et  $p$  tels que  $n$  soit supérieur ou égal à  $p$ . Montrer que deux points  $M_n$  et  $M_p$  sont confondus si, et seulement si,  $(n - p)$  est multiple de 12.
4. a. On considère l'équation (E) :  $12x - 5y = 3$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple  $(4 ; 9)$  est solution, résoudre l'équation (E).  
b. En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $M_n$  appartienne à la demi-droite  $[Ox)$ .

4. 110. Calendrier, C. étrangers, juin 2001

5 points

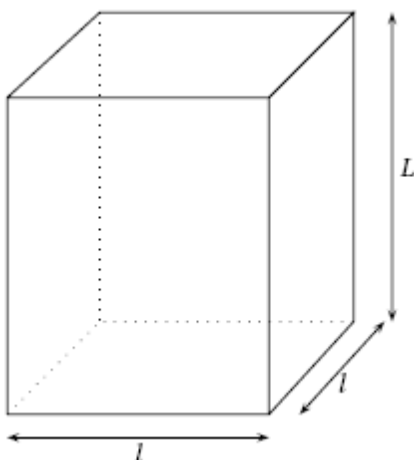
Un astronome a observé au jour  $J_0$  le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ( $J_0 + 6$ ), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle  $J_1$  le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour  $J_1$ .

1. Soient  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre  $J_0$  et  $J_1$ . Montrer que le couple  $(u ; v)$  est solution de l'équation  $(E_1)$  :  $35x - 27y = 2$ .
2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs  $(x_0 ; y_0)$  solution particulière de l'équation  $(E_2)$  :  $35x - 27y = 1$ .  
b. En déduire une solution particulière  $(u_0 ; v_0)$  de  $(E_1)$ .  
c. Déterminer toutes les solutions de l'équation  $(E_1)$ .  
d. Déterminer la solution  $(u ; v)$  permettant de déterminer  $J_1$ .
3. a. Combien de jours s'écouleront entre  $J_0$  et  $J_1$  ?  
b. Le jour  $J_0$  était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour  $J_1$  ? (L'année 2000 était bissextile.)  
c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

4. 111. Bézout, Antilles, juin 2001

5 points



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur  $L$ , à base carrée de côté  $l$ , où  $l$  et  $L$  sont des entiers naturels non nuls tels que  $l < L$ . On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête  $a$

est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question,  $l = 882$  et  $L = 945$ . Quelle est la plus grande valeur possible pour  $a$  ? Quelles sont les valeurs possibles pour  $a$  ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est  $v = 77\,760$ . On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de  $a$  est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête  $c$  est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question,  $l = 882$  et  $L = 945$ . Quelle est la plus petite arête  $c$  pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête  $c$  ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions  $l$  et  $L$  de la boîte B ?

#### 4. 112. Bézout, Am. du Nord, juin 2001

4 points

1. Montrer que, pour tout entier relatif  $n$ , les entiers  $14n + 3$  et  $5n + 1$  sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) :  $87x + 31y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple  $(u ; v)$  d'entiers relatifs tel que  $87u + 31v = 1$  puis une solution  $(x_0 ; y_0)$  de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans  $\mathbb{Z}^2$ .

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation  $87x - 31y - 2 = 0$  dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication : On remarquera que le point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple  $(x ; y)$  vérifie l'équation (E).

#### 4. 113. Repunit, Pondicherry, juin 2001 (c)

4 points

1. On considère l'équation (1) d'inconnue  $(n, m)$  élément de  $\mathbb{Z}^2$  :  $11n - 24m = 1$ .

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .

a. Justifier que 9 divise  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .

b.  $(n, m)$  désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que  $10^{11} - 1$  divise  $10^{11n} - 1$  (on rappelle l'égalité  $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$ , valable pour tout entier naturel  $n$  non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers  $N$  et  $M$  tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$  divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$ .

#### **Correction**

1. a.  $11n - 24m = 1$  : grâce à Bézout, on sait que l'équation a des solutions car 11 et 24 sont premiers entre eux.

b.  $24 = 2 \cdot 11 + 2$ ,  $11 = 5 \cdot 2 + 1$  donc  $1 = 11 - 5(24 - 2 \cdot 11) = 11 \cdot 11 - 5 \cdot 24$ .

Une solution particulière de l'équation est (11, 5).

$$c. \begin{cases} 11n - 24m = 1 \\ 11 \cdot 11 - 24 \cdot 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (n-11) \cdot 11 = 24 \cdot (m-5) \Rightarrow \begin{cases} n-11 = 24k \\ m-5 = 11k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ car } 11 \text{ et } 24 \text{ sont premiers entre eux.}$$

2. a.  $10^{11} - 1 = 100\,000\,000\,000 - 1 = 9\,999\,999\,999 = 9 \cdot 1\,111\,111\,111$ . C'est pareil pour  $10^{24} - 1$ .

b.  $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 1 - 10^{24m+1} + 10 = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9$ ; or si  $(n, m)$  est solution de (1),

on a  $11n = 24m + 1 \Rightarrow 10^{11n} = 10^{24m+1} \Rightarrow 10^{11n} - 10^{24m+1} = 0$ .

c. En utilisant  $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$  avec  $a = 10^{11}$ , on a

$$(10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + \dots + 1) = 10^{11n} - 1$$

donc  $10^{11} - 1$  divise  $10^{11n} - 1$ . De même  $10^{24} - 1$  divise  $10^{24m} - 1$ , et il existe  $N$  et  $M$  tels que :

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9 \Leftrightarrow (10^{11} - 1) \underbrace{(10^{11n-11} + \dots + 1)}_N - 10 \underbrace{(10^{24m-24} + \dots + 1)}_M (10^{24} - 1) = 9.$$

d. Soit  $d$  un diviseur commun de  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$  :  $d$  divise  $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M$  et donc divise 9.

e. Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9 sont les seuls diviseurs communs de  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$ . Comme 9 divise  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$ , c'est leur PGCD.

#### 4. 114. PGCD & PPCM, N. Calédonie, juin 2001

5 points

Dans tout l'exercice  $x$  et  $y$  désignent des entiers naturels non nuls vérifiant  $x < y$ .  $S$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $\text{PGCD}(x, y) = y - x$ .

1. a. Calculer le PGCD(363, 484).

b. Le couple (363, 484) appartient-il à  $S$  ?

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul ; le couple  $(n, n + 1)$  appartient-il à  $S$  ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que  $(x, y)$  appartient à  $S$  si et seulement si il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = (k + 1)(y - x).$$

b. En déduire que pour tout couple  $(x, y)$  de  $S$  on a :  $\text{PPCM}(x, y) = k(k + 1)(y - x)$ .

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples  $(x, y)$  de  $S$  tels que  $\text{PPCM}(x, y) = 228$ .

#### 4. 115. Bézout, Polynésie, juin 2001 (c)

4 points

1. On considère  $x$  et  $y$  des entiers relatifs et l'équation (E)  $91x + 10y = 1$ .

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') :  $91x + 10y = 412$ .

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers  $A_n = 3^{2n} - 1$ , où  $n$  est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.

3. On considère l'équation (E'')  $A_3x + A_2y = 3296$ .

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs  $(x, y)$  solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

#### Correction

1. a. 91 et 10 sont premiers entre eux, l'équation (E) a des solutions d'après Bézout.

b.  $x=1, y=-9$  est une solution... de (E) donc 412 et  $-3708$  sont des solutions de (E').

$$c. \begin{cases} 91x + 10y = 412 \\ 91 \times 412 - 10 \times 3708 = 412 \end{cases} \Rightarrow 91(x - 412) + 10(y + 3708) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 412 = -10k \\ y + 3708 = 91k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 412 - 10k \\ y = -3708 + 91k \end{cases}.$$

$$2. 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n \equiv 1^n [8] \equiv 1 [8] \Rightarrow 3^{2n} - 1 \equiv 0 [8].$$



3. a.  $A_3 = 728$ ,  $A_2 = 80$ , on divise par 8 :  $728x + 80y = 3296 \Leftrightarrow 91x + 10y = 412$ . Les solutions sont celles du 1.c.

b. Il faut que les solutions soient positives :  $\begin{cases} x = 412 - 10k \geq 0 \\ y = -3708 + 91k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 41,2 \\ k \geq 3708 / 91 = 40,7 \end{cases} \Rightarrow k = 41$  et donc

l'unique solution est (2 ; 23).

#### 4. 116. Bézout & rotation, Antilles, juin 2000

5 points

Les points  $A_0 = O ; A_1 ; \dots ; A_{20}$  sont les sommets d'un polygone régulier de centre  $A$ , à 21 côtés, de sens direct.

Les points  $B_0 = O ; B_1 ; \dots ; B_{14}$  sont les sommets d'un polygone régulier de centre  $B$ , à 15 côtés, de sens direct.

Soit  $r_A$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{2\pi}{21}$  et  $r_B$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{2\pi}{15}$ .

On définit la suite  $(M_n)$  de points par :

- $M_0$  est l'un des points  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{20}$  ;
- pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = r_A(M_n)$ .

On définit la suite  $(P_n)$  de points par :

- $P_0$  est l'un des points  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{14}$
- pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_{n+1} = r_B(P_n)$ .

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble  $S$  des entiers naturels  $n$  vérifiant :

$$M_n = P_n = O.$$

1. Dans cette question,  $M_0 = P_0 = O$ .

a. Indiquer la position du point  $M_{2000}$  et celle du point  $P_{2000}$ .

b. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  non nul tel que  $M_n = P_n = O$ . En déduire l'ensemble  $S$ .

2. Dans cette question,  $M_0 = A_{19}$  et  $P_0 = B_{10}$ . On considère l'équation  $(E) : 7x - 5y = 1$  avec  $x \in \mathbb{Z}$  et  $y \in \mathbb{Z}$ .

a. Déterminer une solution particulière  $(a ; b)$  de  $(E)$ .

b. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

c. En déduire l'ensemble  $S$  des entiers naturels  $n$  vérifiant  $M_n = P_n = O$ .

#### 4. 117. PGCD, La Réunion, juin 2000

4 points

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 5, on considère les nombres  $a = n^3 - n^2 - 12n$  et  $b = 2n^2 - 7n - 4$ .

1. Montrer, après factorisation, que  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels divisibles par  $n - 4$ .

2. On pose  $\alpha = 2n + 1$  et  $\beta = n + 3$ . On note  $d$  le PGCD de  $\alpha$  et  $\beta$ .

a. Établir une relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  indépendante de  $n$ .

b. Démontrer que  $d$  est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  sont multiples de 5 si et seulement si  $n - 2$  est multiple de 5.

3. Montrer que  $2n + 1$  et  $n$  sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de  $n$  et en fonction de  $n$ , le PGCD de  $a$  et  $b$ .

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers  $n = 11$  et  $n = 12$ .

#### 4. 118. Bézout, Polynésie, juin 2000

5 points

1. On cherche deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  solutions de l'équation (1)  $ax + by = 60$  ( $a$  et  $b$  entiers naturels donnés tels que  $ab \neq 0$ ). On notera  $d$  le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$ .

a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution  $(x_0 ; y_0)$ . Montrer que  $d$  divise 60.

b. On suppose que  $d$  divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution  $(x_0 ; y_0)$  à l'équation (1).

2. On considère l'équation (2) :  $24x + 36y = 60$ . ( $x$  et  $y$  entiers relatifs).

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation.

On appellera  $S$  l'ensemble des couples  $(x ; y)$  solutions.

c. Énumérer tous les couples  $(x ; y)$  solutions de (2) et tels que :  $-10 \leq x \leq 10$ . Donner parmi eux, ceux pour lesquels  $x$  et  $y$  sont multiples de 5.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble  $E$  des points  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  telles que :  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions  $(x ; y)$  de l'équation (2) appartiennent à  $E$ .

Comment peut-on caractériser  $S$  ?

#### 4. 119. Bézout et plans, Asie juin 2000

5 points

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024).

2. Dans cette question,  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes

$$(1) 2688x + 3024y = -3360 ;$$

$$(2) 8x + 9y = -10.$$

b. Vérifier que  $(1 ; -2)$  est une solution particulière de l'équation (2).

c. Dédurre de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives  $x + 2y - z = -2$  et  $3x - y + 5z = 0$ .

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble  $E$  des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

#### 4. 120. Homothétie & multiples, Liban, mai 2000 (c)

5 points

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $A$  et  $B$  dans ce plan d'affixes respectives  $a = 1 + i$  ;  $b = -4 - i$ .

Soit  $f$  la transformation du plan (P) qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que

$$\overline{OM'} = 2\overline{AM} + \overline{BM}.$$

a. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .

b. Montrer que  $f$  admet un seul point invariant  $\Omega$  dont on donnera l'affixe. En déduire que  $f$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  sont des entiers naturels avec  $1 \leq x \leq 8$  et  $1 \leq y \leq 8$ .

Les coordonnées  $(x' ; y')$  de  $M'$  sont alors :  $x' = 3x + 2$  et  $y' = 3y - 1$ .

a. On appelle  $G$  et  $H$  les ensembles des valeurs prises respectivement par  $x'$  et  $y'$ . Écrire la liste des éléments de  $G$  et  $H$ .

b. Montrer que  $x' - y'$  est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples  $(x' ; y')$  de  $G \times H$  tels que  $m = x'^2 - y'^2$  soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre  $x' - y'$  est un multiple de 6. Le nombre  $x' - y'$  peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si  $x'^2 - y'^2$  est un multiple non nul de 60,  $x' + y'$  est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples  $(x' ; y')$  qui conviennent.

En déduire les couples  $(x ; y)$  correspondant aux couples  $(x' ; y')$  trouvés.

**Correction**

1. a.  $z' = 2(z - a) + (z - b) = 3z - 2a - b = 3z - 6 - i$ .

b.  $z = 3z + 2 - i \Leftrightarrow 2z = -2 + i \Leftrightarrow z = -1 + \frac{1}{2}i$ . On a  $\overline{\Omega M'} = 3\overline{\Omega M}$  donc  $f$  est une homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport 3.

2.  $x' = 3x + 2$  et  $y' = 3y - 1$ , et  $1 \leq y \leq 8$ .

a.  $1 \leq x \leq 8$  donc  $3 \times 1 + 2 \leq x' \leq 3 \times 8 + 2 \Leftrightarrow 5 \leq x' \leq 26$

et  $1 \leq y \leq 8$  donc  $3 \times 1 - 1 \leq y' \leq 3 \times 8 - 1 \Leftrightarrow 2 \leq y' \leq 23$ .

b.  $x' - y' = 3x + 2 - 3y + 1 = 3x - 3y + 3 = 3(x - y + 1)$ .

c. Si on prend deux entiers pairs ou impairs, la somme est paire, la différence également ; si on prend deux entiers de parité différente, la somme est impaire, la différence également.

d.  $m = x'^2 - y'^2 = 60k \Leftrightarrow (x' - y')(x' + y') = 60k$  ;  $x' + y' = 3x + 2 + 3y - 1 = 3x + 3y + 1 = 3(x + y) + 1$ .

Si  $x'$  et  $y'$  sont de parité différente,  $x' - y'$  et  $x' + y'$  sont impairs et leur produit également ; ce ne peut être un multiple de 60. Donc  $x'$  et  $y'$  sont de parité identique ; comme  $x' - y'$  est un multiple de 3 et pair, c'est un multiple de 6.

Si le nombre  $x' - y'$  est un multiple de 30,  $x - y + 1$  est un multiple de 10, or  $x$  et  $y$  sont plus petits que 8, c'est impossible.

e. Comme  $x' - y'$  est un multiple de 6 et pas de 30,  $x' - y'$  n'est pas divisible par 5 ; pour que  $x'^2 - y'^2$  soit un multiple non nul de 60, il faut donc que  $x' + y'$  soit divisible par 5 ; comme il est pair, c'est un multiple de 10.

On a alors  $\begin{cases} x' - y' = 6p \\ x' + y' = 10q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = 6p + 10q \\ 2y' = 10q - 6p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5q + 3p \\ y' = 5q - 3p \end{cases}$  avec  $p = 1$  ou 2 et  $q = 1, 2, 3$  ou 4, ce qui

donne :

$p$	$q$	$x'$	$y'$	$x'^2 - y'^2$	$x$	$y$
1	1	8	2	60	2	1
1	2	13	7	120	11/3	8/3
1	3	18	12	180	16/3	13/3
1	4	23	17	240	7	6
2	1	11	-1	120	3	0
2	2	16	4	240	14/3	5/3
2	3	21	9	360	19/3	10/3
2	4	26	14	480	8	5

et donc les solutions en  $x$  et  $y$  :  $(2 ; 1), (7 ; 6), (8 ; 5)$ . On pouvait le faire rapidement avec Excel...

	$y$	1	2	3	4	5	6	7	8
	$y'$	2	5	8	11	14	17	20	23

x	x'								
1	5	21	0	-39	-96	-171	-264	-375	-504
2	8	60	39	0	-57	-132	-225	-336	-465
3	11	117	96	57	0	-75	-168	-279	-408
4	14	192	171	132	75	0	-93	-204	-333
5	17	285	264	225	168	93	0	-111	-240
6	20	396	375	336	279	204	111	0	-129
7	23	525	504	465	408	333	240	129	0
8	26	672	651	612	555	480	387	276	147

**4. 121. Congruences, Pondicherry, mai 2000 (c)**

5 points

- Pour  $1 \leq n \leq 6$ , calculer les restes de la division euclidienne de  $3^n$  par 7.
- Démontrer que, pour tout  $n$ ,  $3^{n+6} - 3^n$  est divisible par 7. En déduire que  $3^{n+6}$  et  $3^n$  ont même reste dans la division par 7.
- A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de  $3^{1000}$  par 7.
- De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de  $3^n$  par 7, pour  $n$  quelconque ?
- En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^n$  est premier avec 7.

2. Soit  $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$ ,  $n$  entier supérieur ou égal à 2.

- Montrer que  $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ .
- Déterminer les valeurs de  $n$  telles que  $u_n$  soit divisible par 7.
- Déterminer tous les diviseurs de  $u_6$ .

**Correction**

1. a.  $3^0 = 1 \equiv 1[7]$ ,  $3^1 = 3 \equiv 3[7]$ ,  $3^2 = 9 \equiv 2[7]$ ,  $3^3 \equiv 3 \times 2[7] \equiv 6[7]$ ,  $3^4 \equiv 4[7]$ ,  $3^5 \equiv 5[7]$ ,  $3^6 \equiv 1[7]$ .

Tous les 6 termes on retourne au point de départ.

b.  $3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1)$  or  $3^6 \equiv 1[7]$  donc  $3^6 - 1$  est divisible par 7.

c. Divisons 1000 par 6 :  $1000 = 6 \times 166 + 4$  donc  $3^{1000} = (3^6)^{166} \times 3^4$  ; comme  $3^6 \equiv 1[7]$  et  $3^4 \equiv 4[7]$ , on a  $3^{1000} \equiv 4[7]$ .

d. En divisant  $n$  par 6 on a une partie qui sera congrue à 1 et l'autre tombera dans les restes calculés au 1.a.

e. En aucun cas on ne peut trouver un reste nul donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^n$  est premier avec 7.

2. a. On a la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3, de premier terme 1 :  $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ .

b.  $u_n$  est divisible par 7 lorsque  $3^n \equiv 1[7]$ , soit lorsque  $n$  est un multiple de 6.

c.  $u_6 = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{1}{2}(3^3 - 1)(3^3 + 1) = 2^2 \times 7 \times 13$  ; tous les diviseurs sont donc

1, 13, 7, 91, 2, 26, 14, 182, 4, 52, 28, 364.

4. 122. PGCD & parité, N. Calédonie, déc. 1999

5 points

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants :  $N = 9n + 1$  et  $M = 9n - 1$ .

1. On suppose que  $n$  est un entier pair. On pose  $n = 2p$ , avec  $p$  entier naturel non nul.
  - a. Montrer que  $M$  et  $N$  sont des entiers impairs.
  - b. En remarquant que  $N = M + 2$ , déterminer le PGCD de  $M$  et  $N$ .
2. On suppose que  $n$  est un entier impair. On pose  $n = 2p + 1$ , avec  $p$  entier naturel.
  - a. Montrer que  $M$  et  $N$  sont des entiers pairs.
  - b. En remarquant que  $N = M + 2$ , déterminer le PGCD de  $M$  et  $N$ .
3. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère l'entier  $81n^2 - 1$ .
  - a. Exprimer l'entier  $81n^2 - 1$  en fonction des entiers  $M$  et  $N$ .
  - b. Démontrer que si  $n$  est pair alors  $81n^2 - 1$  est impair.
  - c. Démontrer que  $81n^2 - 1$  est divisible par 4 si et seulement si  $n$  est impair.

4. 123. Bases, Am. du Sud, nov. 1999

5 points

On considère l'équation (1) :  $20b - 9c = 2$  où les inconnues  $b$  et  $c$  appartiennent à l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple  $(b_0 ; c_0)$  d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors  $c_0$  est un multiple de 2.  
b. On désigne par  $d$  le p.g.c.d. de  $|b_0|$  et  $|c_0|$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $d$  ?
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.
3. Déterminer l'ensemble des solutions  $(b ; c)$  de (1) telles que  $\text{p.g.c.d.}(b ; c) = 2$ .
4. Soit  $r$  un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.  
Le nombre entier naturel  $P$ , déterminé par

$$P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \dots + \alpha_1 r + \alpha_0$$

où  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$  sont des nombres entiers naturels vérifiant  $0 < \alpha_n < r, 0 \leq \alpha_{n-1} < r, \dots, 0 \leq \alpha_1 < r, 0 \leq \alpha_0 < r$  est noté  $\overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0}^{(r)}$  ; cette écriture est dite « écriture de  $P$  en base  $r$  ».

Soit  $P$  un nombre entier naturel s'écrivant  $\overline{ca5}^{(6)}$  et  $\overline{bbaa}^{(4)}$  (en base six et en base quatre respectivement).

Montrer que  $a+5$  est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de  $a$ , puis de  $b$  et de  $c$ .  
Donner l'écriture de  $P$  dans le système décimal.

4. 124. Bézout, Liban, juin 1999 (c)

5 points (énoncé modifié par rapport à l'original)

Le nombre  $n$  est un entier naturel non nul ; on pose  $a = 4n + 3$  et  $b = 5n + 2$  et on note  $d$  le PGCD de  $a$  et  $b$ .

1. Complétez le tableau ci-dessous. Quelle conjecture pouvez vous faire sur  $d$  ?

$n$	$a$	$b$	$d$
8			
9			
10			
11			
12			
13			

14			
15			
16			
17			

2. Calculer  $5a - 4b$  et en déduire les valeurs possibles de  $d$ .
3. On considère l'équation (E) :  $7k - 4n = 3$ , où  $n$  et  $k$  sont deux entiers naturels non nuls.
- a. Déterminer une solution particulière de (E), puis tous les couples solutions de (E).
- b. En déduire tous les couples d'entiers naturels  $(n ; k)$  solutions tels que  $4n + 3 = 7k$ .
4. Déterminer, à l'aide des congruences, les entiers naturels  $n$  tels que  $5n + 2$  soit divisible par 7.
5. Soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de  $r$  pour laquelle  $d$  vaut 7.
- Pour quelles valeurs de  $r$ ,  $d$  est-il égal à 1 ?

**Correction**

1.

$n$	$a$	$b$	$d$
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

Il semble que lorsque  $n \equiv 1[7]$ ,  $d = 7$  sinon  $d = 1$ .

2.  $5a - 4b = 20n + 15 - 20n - 8 = 7$ .  $d$  divise 7 donc  $d = 1$  ou  $d = 7$ .

3. a. (E) :  $7k - 4n = 3$  : la solution  $k = 1, n = 1$  est évidente. En appliquant la méthode habituelle on a :

$$\begin{cases} 7k - 4n = 3 \\ 7 \times 1 - 4 \times 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 7(k-1) - 4(n-1) = 0 \Rightarrow 7(k-1) = 4(n-1) ;$$

comme 4 ne divise pas 7 il divise  $k-1$ , de même comme 7 ne divise pas 4 il divise  $n-1$  et finalement

$$\begin{cases} k-1 = 4p \\ n-1 = 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 4p \\ n = 1 + 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z} .$$

b.  $(n ; k)$  entiers naturels :  $\begin{cases} k = 1 + 4p \geq 0 \\ n = 1 + 7p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq -1/4 \\ p \geq -1/7 \end{cases} \Rightarrow p \geq 0 .$

4. a. Avec un petit tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$5n+2 \pmod 7$	2	0	5	3	1	6	4

Donc  $5n + 2$  est divisible par 7 lorsque  $n \equiv 1[7]$ .

5. D'après la question 3. on a  $4n+3=7k$  lorsque  $n \equiv 1[7]$ , de même pour  $5n+2=7k$ . Lorsque  $n \equiv 1[7]$ ,  $a$  et  $b$  sont divisibles par 7 qui est alors la valeur de  $d$ ; il faut donc  $r = 1$ .  
Pour toutes les autres valeurs de  $r$ , ni  $a$  ni  $b$  ne sont divisibles par 7 et  $d = 1$ .

4. 125. Bézout & plan, C. étrangers, juin 1999

5 points

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple  $(x_0; y_0)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation :  $48x + 35y = 1$ .

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

b. Déduire de 1. a. tous les couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(48; 35; 24)$  et le point  $A$  de coordonnées  $(-11; 35; -13)$ .

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble  $(P)$  des points  $M$  de l'espace, de coordonnées  $(x; y; z)$  tels que  $\vec{u} \cdot \overline{AM} = 0$ .

b. Soit  $(D)$  la droite intersection de  $(P)$  avec le plan d'équation  $z = 16$ .

Déterminer tous les points de  $(D)$  dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle  $[-100; 100]$ .

En déduire les coordonnées du point de  $(D)$ , coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

4. 126. Bézout, Asie, juin 1999

5 points

1. On considère l'équation  $(E) : 8x + 5y = 1$ , où  $(x; y)$  est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation  $(E)$ .

b. Résoudre l'équation  $(E)$ .

2. Soit  $N$  un nombre naturel tel qu'il existe un couple  $(a; b)$  de nombres entiers vérifiant : 
$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a. Montrer que le couple  $(a; b)$  est solution de  $(E)$ .

b. Quel est le reste, dans la division de  $N$  par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation  $8x + 5y = 100$ , où  $(x; y)$  est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII<sup>ème</sup> siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

4. 127. Bézout, Antilles - Guyane, juin 1999

5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne le point  $A(12; 18)$ . On désigne par  $B$  un point de l'axe  $(O; \vec{i})$  et par  $C$  un point de l'axe  $(O; \vec{j})$  tels que  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ .

On appelle  $x$  l'abscisse de  $B$  et  $y$  l'ordonnée de  $C$ .

1. Démontrer que le couple  $(x; y)$  est solution de l'équation  $(E) : 2x + 3y = 78$ .

2. On se propose de trouver tous les couples  $(B, C)$  de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation  $(E)$ , avec  $x$  et  $y$  appartenant à l'ensemble  $\square$  des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de  $B$  et  $C$ , trouver une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de  $(E)$  avec  $x_0$  et  $y_0$  appartenant à  $\square$ .

c. Démontrer qu'un couple  $(x; y)$  d'entiers relatifs est solution de l'équation  $(E)$  si, et seulement si, il est de la forme  $(12 + 3k; 18 - 2k)$ , où  $k$  appartient à  $\square$ .



d. Combien y a-t-il de couples de points  $(B, C)$  ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :  $-6 \leq x \leq 21$  et  $-5 \leq y \leq 14$  ?

4. 128. Th. de Wilson, Am. du Nord, juin 1999

5 points

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit  $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$ . Déterminer les paires  $\{a ; b\}$  d'entiers distincts de  $E$  tels que le reste de la division euclidienne de  $ab$  par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier  $(n - 1)! + 1$  est-il pair ?
3. L'entier  $(n - 1)! + 1$  est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier  $(15 - 1)! + 1$  n'est pas divisible par 15.
5. L'entier  $(11 - 1)! + 1$  est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit  $p$  un entier naturel non premier ( $p \geq 2$ ).

1. Prouver que  $p$  admet un diviseur  $q$  ( $1 < q < p$ ) qui divise  $(p - 1)$ .
2. L'entier  $q$  divise-t-il l'entier  $(p - 1)! + 1$  ?
3. L'entier  $p$  divise-t-il l'entier  $(p - 1)! + 1$  ?

4. 129. Premiers, France, juin 1999

Pour tout entier naturel  $n$ , non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1. a. Calculer  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$  et  $c_3$ .
  - b. Combien les écritures décimales des nombres  $a_n$  et  $c_n$  ont-elles de chiffres ? Montrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3.
  - c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous que  $b_3$  est premier.
  - d. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $b_n \times c_n = a_{2n}$ .
  - e. Montrer que  $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$ . En déduire que  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (1) :  $b_3x + c_3y = 1$  d'inconnues les entiers relatifs  $x$  et  $y$ .
- a. Justifier le fait que (1) a au moins une solution.
  - b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres  $c_3$  et  $b_3$  ; en déduire une solution particulière de (1).
  - c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

4. 130. Congruences, Polynésie, juin 1999

4 points

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).  
En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.
  2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
  3. Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier  $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ .
- a. Si  $p = 3n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$ , par 7 ?

b. Démontrer que si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p$  est divisible par 7.

c. Étudier le cas où  $p = 3n + 2$ .

4. On considère les nombres entiers  $a$  et  $b$  écrits dans le système binaire (en base 2) :

$$a = 1001001000, b = 1000100010000.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme  $A_p$ . Sont-ils divisibles par 7 ?

4. 131. Eq. dioph., Pondicherry, mai 1999 (c)

4 points

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  :

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où  $S$  est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de  $S$  telles que (E) admette deux solutions dans  $\mathbb{N}$ .

1. Peut-on déterminer un entier  $S$  tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier  $S$  tel que 5 soit solution de (E) ?

3. Montrer que tout entier  $n$  solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de  $S$  telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

$$2 \ 3 \ 5 \ 7 \ 11 \ 13 \ 17 \ 19 \ 23 \ 29 \ 31 \ 37 \ 41 \ 43 \ 47 \ 53 \ 59 \ 61 \ 67 \ 71 \ 73 \ 79 \ 83 \ 89 \ 97.$$

**Correction**

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

On pose  $\begin{cases} a = kd \\ b = kd' \end{cases}$  où  $d$  est le PGCD de  $a$  et  $b$  :  $a + b = dk + dk' = d(k + k') = 1999(k + k') = 11994 \Rightarrow k + k' = 6$ .

Les valeurs possibles de  $k$  et  $k'$  et celles de  $a$  et  $b$  sont donc :

$k$	$k'$	$a$	$b$
0	6	0	11994
1	5	1999	9995
2	4	3998	7996
3	3	5997	5997
4	2	7996	3998
5	1	9995	1999
6	0	11994	0

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  :

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où  $S$  est un entier naturel.

1. 3 est solution de (E) ssi  $9 - 3S + 11994 = 0 \Leftrightarrow S = 4001$  ; la deuxième solution est alors  $4001 - 3 = 3008$ .

2. 5 est solution de (E) ssi  $25 - 5S + 11994 = 0 \Leftrightarrow 5S = 12019$ ,  $S$  n'est pas entier, ça ne colle pas.

3. (E) peut s'écrire également  $11994 = Sn - n^2 = n(S - n)$  donc  $n$  divise 11994.

Comme  $11994 = 6 \times 1999 = 2 \times 3 \times 1999$ ,  $n$  peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997 et 11994 d'où

$S$  peut prendre les valeurs 2005, 4001, 5999 et 11995.

$n$	$S - n$	$S$
1	11994	11995
2	5997	5999
3	3998	4001
6	1999	2005
1999	6	2005
3998	3	4001
5997	2	5999
11994	1	11995

Partie C

Evident... inutile de dépasser  $\sqrt{1999} \approx 44,7 \dots$

4. 132. Diviseurs+pgcd, Bac C, Lyon, 1981

$n$  désigne un entier naturel.

1. Montrer que le pgcd de  $n - 1$  et  $n + 3$  est le même que celui de  $n + 3$  et 4.

Quelles valeurs peut prendre le pgcd de  $n - 1$  et  $n + 3$  ?

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $n - 1$  divise  $n + 3$ .

3. Montrer que pour tout  $n$ , les entiers  $n - 1$  et  $n^2 + 2n - 2$  sont premiers entre eux.

4. Déterminer l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $(n - 1)(2n + 1)$  divise  $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$ .

4. 133. Bézout + ppcm, Bac C, Japon 1980

1. On considère dans  $Z^2$  l'équation (E) :  $18a + 23b = 2001$ .

a. Montrer que pour tout couple  $(a, b)$  solution de (E)  $a$  est un multiple de 23 et  $b$  un multiple de 3.

b. Déterminer une solution de (E).

c. Résoudre (E).

2. Déterminer les couples  $(p, q)$  d'entiers tels que  $18d + 23m = 2001$ , où  $d$  désigne le pgcd de  $p$  et  $q$ , et  $m$  leur ppcm.

4. 134. Base et diviseurs, Bac C, Inde, 1979

Soit  $B$  un entier strictement supérieur à 3. Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base  $B$

1. Montrer que  $\overline{132}$  est divisible par  $B + 1$  et  $B + 2$

2. Pour quelles valeurs de  $B$   $\overline{132}$  est-il divisible par 6 ?

3. Montrer que  $A = \overline{1320}$  est divisible par 6.

4. 135. Bases+congruences, Bac C, Aix, 1976

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 7.

2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division euclidienne de  $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$  par 7 (on pourra remarquer que  $851 \equiv 4 \pmod{7}$ ).

3. On considère le nombre  $B$  qui s'écrit  $\overline{2103211}^4$ . Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de  $B$  par 4.

#### 4. 136. Nombres de Farey et approximation d'un rationnel par un rationnel

##### Définition

On dira que deux fractions irréductibles  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  sont **consécutives** si  $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$  et s'il n'existe pas de fraction  $\frac{a}{b}$  comprise dans l'intervalle ouvert  $\left] \frac{m}{n}; \frac{m'}{n'} \right[$  telle que  $b$  soit inférieur au plus petit des deux dénominateurs  $n$  et  $n'$ .

##### Théorème

**Deux fractions irréductibles  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  sont consécutives si et seulement si**

$$nm' - mn' = 1 \quad (*)$$

##### Démonstration

- Démontrer d'abord que si la relation (\*) est vérifiée, alors les deux fractions sont effectivement consécutives (comparer  $\frac{a}{b} - \frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'} - \frac{m}{n}$ , dans le cas où  $b$  est inférieur à  $\min(n, n')$ ).
- Inversement, soit  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  deux fractions irréductibles ne vérifiant pas la condition(\*). On suppose d'abord :  $n \leq n'$ .
- Démontrer que l'équation  $nx - my = 1$  a des solutions en nombres entiers, puis donner tous les couples d'entiers solutions à partir d'une solution  $(x_0, y_0)$ .
- Démontrer qu'un des couples  $(m'', n'')$  solution est tel que  $1 \leq n'' < n$ .
- Conclure d'après la démonstration du sens direct que les fractions  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  ne sont pas consécutives.
- Procéder de façon similaire dans le cas  $n' < n$ , en considérant l'équation :  $xm' - yn' = 1$ .

##### Définition

Soit  $N$  un entier naturel non nul.

On appelle **suite de Farey** d'ordre  $N$  la suite finie des fractions irréductibles inférieures ou égales à 1, dont le dénominateur vaut au plus  $N$ , classées dans l'ordre croissant.

Exemple : la suite de Farey d'ordre 7 est :  $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Il est alors immédiat que deux termes successifs d'une suite de Farey :  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$ , sont consécutifs au sens ci-dessus. Donc, d'après le Théorème :  $nm' - mn' = 1$  (proposition 1).

Examinons maintenant comment une nouvelle fraction s'insère dans la précédente suite de Farey.

Supposons que  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m''}{n''}$  soient consécutifs dans une suite de Farey, et que dans une suite de Farey

postérieure on ait comme termes consécutifs :  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ .  $(m', n')$  est une solution de  $nx - my = 1$ ;  $(m'', n'')$  est la solution suivante, donc  $m'' = m + m', n'' = n + n'$  (proposition 2).

Telle est la formule qui donne l'insertion d'une nouvelle fraction. Il faut donc rechercher les dénominateurs de fractions consécutives dont la somme est égale au nouvel ordre de Farey.

Par exemple, avant la suite de Farey d'ordre 7 ci-dessus, nous avions celle d'ordre 5 :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Les fractions consécutives dont la somme des dénominateurs fait 7 sont  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{3}$ , entre lesquels va s'intercaler  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{2}{5}$  et  $\frac{1}{2}$  qui vont donner naissance à  $\frac{3}{7}$ , etc.

On peut aussi montrer, plus généralement :

Si  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$  sont trois termes successifs d'une suite de Farey, alors  $\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}$ .

Farey était un géologue britannique. Il introduisit en 1816 les suites qui portent son nom, en énonçant les propriétés que nous venons de voir. Cauchy compléta ses preuves.

On peut aussi parler de l'approximation rationnelle d'un réel, par exemple sous l'aspect graphique, pour commencer. Les meilleures fractions approximantes sont les réduites de la fraction continuée. Le

“Résultat” ci-dessus permet d'affirmer que deux réduites consécutives  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  vérifient l'équation :  $nm' - mn' = 1$  ou  $-1$ .