



### I°/ Définition :

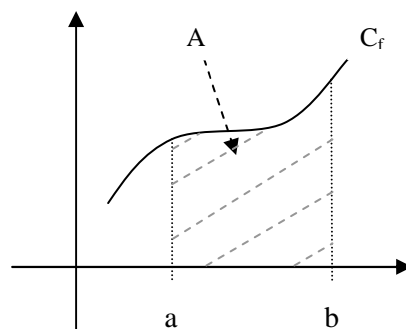
On a démontré qu'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  admet une infinité de primitives ( c'est-à-dire des fonctions admettant pour dérivé  $f$  sur  $I$ .)

Si l'une des primitives est  $F$ , toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  s'écrivent  $G$  telles que  $G(x) = F(x) + k$  où  $k$  est une constante quelconque.

Le nombre  $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$  ( où  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$  ) est donc indépendant de  $k$ , ce note  $[F(t)]_a^b$  ou encore  $\int_a^b f(t) dt$  et s'appelle l'intégrale, de  $a$  à  $b$ , de la fonction continue  $f$  (  $t$  est la variable sur  $[a; b]$ .)

### II°/ Interprétation géométrique d'une intégrale :

Le nombre  $\int_a^b f(t) dt$  représente l'aire algébrique de la courbe  $C_f$  située dans le domaine délimité par les deux droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $C_f$  sur  $[a; b]$  et l'axe des abscisses.



### III°/ Propriétés immédiates :

#### 1°/ Relation de Chasles :

Soit  $c$  dans  $[a; b]$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  alors

$$\boxed{\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt}$$

$A = A_1 + A_2$

#### 2°/ Nullité d'une intégrale :

$$\boxed{\int_a^a f(t) dt = 0}$$

### Conséquence :

$$\int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = 0$$

donc

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

### 3°/ Linéarité :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a ; b]$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels quelconques alors :

$$\int_a^b \lambda.f(t) + \mu.g(t) dt = \lambda. \int_a^b f(t) dt + \mu. \int_a^b g(t) dt$$

### Démonstration :

### 4°/ Inégalité :

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $[a ; b]$  :

- si  $f \geq 0$  sur  $[a ; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
- si  $f \leq 0$  sur  $[a ; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq 0$
- si  $f \geq g$  sur  $[a ; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

### 5°/ Inégalité de la moyenne :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a ; b]$   
Soient  $m$  et  $M$  deux réels tels que :

$$\forall t \in [a ; b] \text{ si } m \leq f(t) \leq M \text{ alors } m.(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M.(b-a)$$

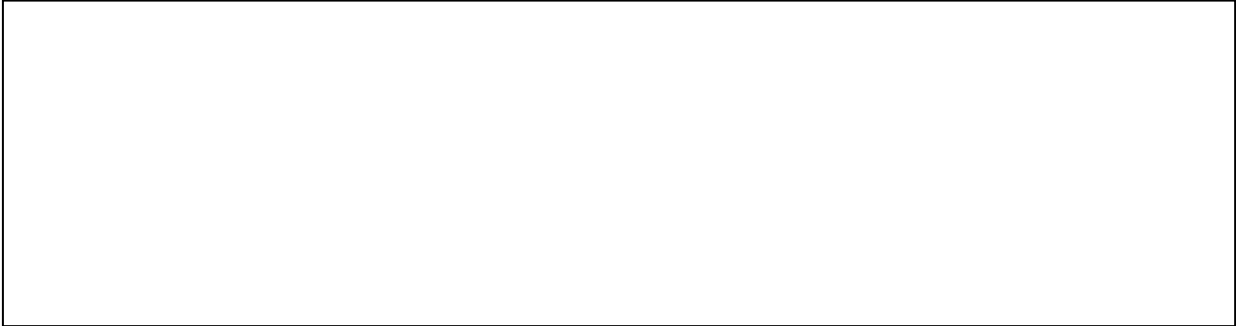
Ou encore :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t) dt \leq M$$

### Vocabulaire :

La valeur  $\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t) dt$  s'appelle la valeur moyenne de f sur [ a ; b ]

### Démonstration :



### IV°/ Intégration par parties :

#### Théorème :

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées continues sur [ a ; b ] ( f et g sont dites de classe  $C^1$  ).  
Et f ' et g ' les dérivées respectives de f et g sur [ a ; b ] .

$$\int_a^b f(t).g'(t) dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t).g(t) dt$$

### V°/ Exercices :

Calculs d'intégrales simples :

$$\bullet I = \int x^3 + 3x^2 - 1 dx$$

$$\bullet I = \int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$\bullet I = \int_1^2 \left( t + \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$\bullet I = \int_{-1}^{\ln 2} 1 - 5e^x dx$$

Intégration par parties :

$$\bullet I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} x.e^x dx$$

$$\bullet I = \int_{-1}^0 (-2x + 1).e^x dx$$

$$\bullet I = \int_e^{2e} x \cdot \ln x^3 dx$$

$$\bullet I = \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$$

$$\bullet I = \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\bullet I = \int_{-1}^0 (x+1)^2 \cdot e^{-x} dx$$