1) Définition :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$. *Elle admet donc des primitives sur cet intervalle*

On appelle fonction ***logarithme népérien*** *qu'on note* **ln** *la primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *qui s'annule en 1.* $\left(\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt\right)$.

Conséquences :

- *La fonction* ln *est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *de dérivée la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

2) Premières propriétés de la fonction ln :

On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. *Donc* ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$. *La fonction* ln *étant dérivable donc continue, et strictement croissante de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$, *est donc une bijection de* $]0,+\infty[$ *dans* $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

Conséquences :

- *1 a un unique antécédent par* ln *noté e :* $\ln(e) = 1$.
- *Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :* $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ *et* $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- *Pour* $x > 1$, *on a* $\ln x > 0$ *et pour* $x < 0$, *on a* $\ln x < 0$.

Exercice 1 :

Résoudre $\ln(4 - x) > 0$.

Propriété :

Si u est une fonction strictement positif et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée ln(u) est dérivable sur I et on a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition de f et calculer sa dérivée

$f(x) = \ln(x+3)$; $f(x) = \ln(x) + 3$; $f(x) = \ln(x^2+1)$; $f(x) = x + \ln(x^2)$; $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

3) Relations importantes :

Exercice 3 :

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ *par f(x) =* $\ln(ax)$.

1) *Calculer F'(x). En déduire que F est aussi une primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$.

   Comment peut-on alors écrire F(x) ?

2) *En calculant F(1) de deux manières, en déduire que, pour tout* $x \in]0,+\infty[$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

3) *En utilisant la relation précédente, déterminer une relation entre* $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ *et* $\ln(a)$.

4) *Donner une relation entre* $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, $\ln(a)$ *et* $\ln(b)$, *pour tous réels strictement positifs a et b.*

Propriétés : *Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors :*

1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ 2) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ 3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

4) $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$ 5) $\ln\left(a^n\right) = n\ln a,\ pour\ tout\ n \in \mathbb{Z}.$

6) $\ln\left(a_1 \times a_2 \times ... \times a_n\right) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$, *avec* $a_1, a_2, ...$ *et* a_n *sont des réels strictement positifs.*

Remarque : *La fonction* ln *transforme un produit en somme, un inverse en opposé et un quotient en différence.*

Exercice 4 :

Simplifier les expressions suivantes :

$\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$; $\ln 2 + \ln 4 - \ln 8$; $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(\sqrt{3}\right)$; $\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ *par* $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^3}\right)$.

Calculer f'(x) et étudier son signe. En déduire le sens variations de f.

4) Etude de la fonction ln :

Propriété : *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. *En effet, pour* $x \geq 3^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, $\ln x \geq n.\ln 3$.

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$. *En effet, on a* $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$.

Remarques :

1) *La droite d'équation x = 0 (l'axe (Oy)) est une asymptote verticale quand x tend vers* 0^+.
2) *Les valeurs approchées* $\ln 2 \simeq 0.7$ *et* $\ln 3 \simeq 1.1$ *sont à connaître.*
3) *La tangente à la courbe de la fonction* ln *au point d'abscisse 1est T : y = x – 1.*

Tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	||		$+$	
$\ln(x)$	|| $-\infty$	0	1	$+\infty$

Courbe représentative :

Quelques tangentes remarquables:

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$y = 1(x-1) + \ln 1 = x - 1.$

La tangente au point d'abscisse e a pour équation :

$y = \frac{1}{e}(x-e) + \ln e = \frac{1}{e}x - 1 + 1 = \frac{x}{e}$. Cette tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 6

1) *Montrer que, pour tout* $x \in \left]0,+\infty\right[$, $\ln x \le \sqrt{x}$. *(on pourra étudier la fonction* $h(x) = \ln x - \sqrt{x}$ *).*

2) *En déduire que, pour tout x>1, on a* $0 \le \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3) *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Propriétés :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exercice 7 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$\ln x \ge 1$; $\ln x = 2$; $\ln x \le 1$; $3 - \ln x \le 8$; $\ln(2x+1) = 1$

$\ln(x^2) = -1$; $\ln(x(x+1)) = 0$; $\ln x + \ln(x+1) = 0$

Exercice 8 *Déterminer les limites suivantes :*

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} - \ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{3+2x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\ln x}{x}$

Exercice 9 *Soit la fonction définie sur* $\left]1,+\infty\right[$ *par* $f(x) = \frac{\quad}{x\ln x}$.

1) *Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. En déduire les asymptotes à* ζ_f .

2) *Dresser le tableau des variations de f.*

3) *Tracer* ζ_f *ainsi que sa tangente au point d'abscisse e.*

Théorème : *Pour tout entiers non nuls n et m, on a :*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m}=0 \text{ et } \lim_{x\to0^+}x^m(\ln x)^n=0.$$

Propriétés :

1) Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I, alors la fonction $x\mapsto\ln(|u(x)|)$ *est dérivable sur I et on a* $\left(\ln(|u(x)|)\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$*, pour tout* $x\in I$.

2) Toute fonction dérivable de la forme $\frac{u'}{u}$ *a pour primitive* $\ln(|u|)$ *sur tout intervalle où u ne s'annule pas.*

Exercice 10 : *Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f a des primitives et donner une primitive de f :*

$$f(x)=\frac{2}{2x-3}\ ,\ f(x)=\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ f(x)=\frac{\ln x}{x}\ ,\ f(x)=\frac{1}{x\ln x}.$$

5) Fonction logarithme décimal :

Exercice 11 : *On considère la fonction f définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f(x)=\frac{x}{\ln 10}$.

1) *Calculer f(1) et f(10).*
2) *Montrer que, pour tout réels strictement positifs a et b et pour tout entier relatif n, on a :*

$$f(a.b)=f(a)+f(b)\ ;\ f\left(\frac{1}{b}\right)=-f(b)\ ;\ f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)\ ;\ f(a^n)=n.f(a).$$

Cette fonction est appelée fonction logarithme décimal, qu'on note log.

3) *Déterminer* $\lim_{x\to0^+}f$ *et* $\lim_{x\to+\infty}f$.
4) *Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variations.*
5) *Tracer la courbe représentative de f.*