I°/ Définitions :

Lorsqu'une étude est faite sur un ensemble à N individus présentant deux caractères X et Y quantitatifs discrets, on obtient une **série statistique double** $(x_i;y_i)$

Avec $(x_i)_{1\le i\le N}$ les valeurs prises par X et $(Y_i)_{1\le i\le N}$ les valeurs prises par Y

Une série statistique est souvent présentée par un tableau appelé tableau à double entré.

Paramètres d'une série statistiques

F Valeur Moyenne de X (ou Moyenne Arithmétique de X) notée $\overline{X}$ définie par : $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

Remarque : Si on utilise les distributions marginales on utilise la formule : $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}n_ix_i$ Avec n_i l'effectif de x_i ou le nombre de répétition de x_i

F Variance de X noté $V(X)$ définie par : $V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}^2$

Remarque : Si on utilise les distributions marginales on utilise la formule :

$V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}n_ix_i^2-\overline{X}^2$ Avec n_i l'effectif de x_i ou le nombre de répétition de x_i

F Ecart-type noté σ_X ou $\sigma(X)$ définie par : $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$

Remarque : Cette formule explique bien que l'Ecart-type n'est définie que si : $V(X)\ge 0$

Nuage De Points

F Soit $(x_i;y_i)$ avec $1\le i\le n$ une série statistique double. On désigne par $x_1,x_2,\dots\dots x_i,\dots x_n$ les valeurs prises par X et $y_1,y_2,\dots\dots y_i,\dots y_n$ les valeurs prises par Y.

Dans le plan étant rapporté à un repère orthogonal. On appelle Nuage De Points associé à la série considérée l'ensemble des points $M_i(x_i;y_i)_{1\le i\le n}$. Et on appelle Point Moyen du nuage le point de coordonnées $\overline{X}$ et noté : $G(\overline{X};\overline{Y})$

Soit $(x_i;y_i)$ avec $1\le i\le n$ une série statistique double. On appelle Covariance de X et Y notée $\operatorname{cov}(X,Y)$ le nombre défini par : $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$

Remarque : $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)-\overline{X}\,\overline{Y}$ Est la plus commode pour les calculs ‘' à la main''

Conséquences :

- $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$
- $\operatorname{cov}(aX+b,Y)=a\operatorname{cov}(Y,X);\forall\ a,b\in$ ß
- $\operatorname{cov}(X,X)=V(X)$
- $\operatorname{cov}^2(X,Y)\le V(X)V(Y)$

Remarque : La covariance permet une mesure de la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen.

II°/ Nuage de points, Moyenne, Variance, Ecart-type, covariance et Coefficient de corrélation linéaire. (Réf 274)

On considère le tableau suivant :

X_i	5,1	5	4,8	4,7	4,7	4,6	4,6	4,4	3,9	3,3
Y_i	121	126	136	138	143	147	152	162	180	220

1) Placer dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ le nuage de points $M_i(x_i;y_i)_{1\le i\le 10}$

2) Comment semble réparti le nuage de points ? Commentez !

3) Calculer : $\overline{X}$ la moyenne arithmétique de la série statistique à variable x_i

4) Calculer : $\overline{Y}$ la moyenne arithmétique de la série statistique à variable y_i

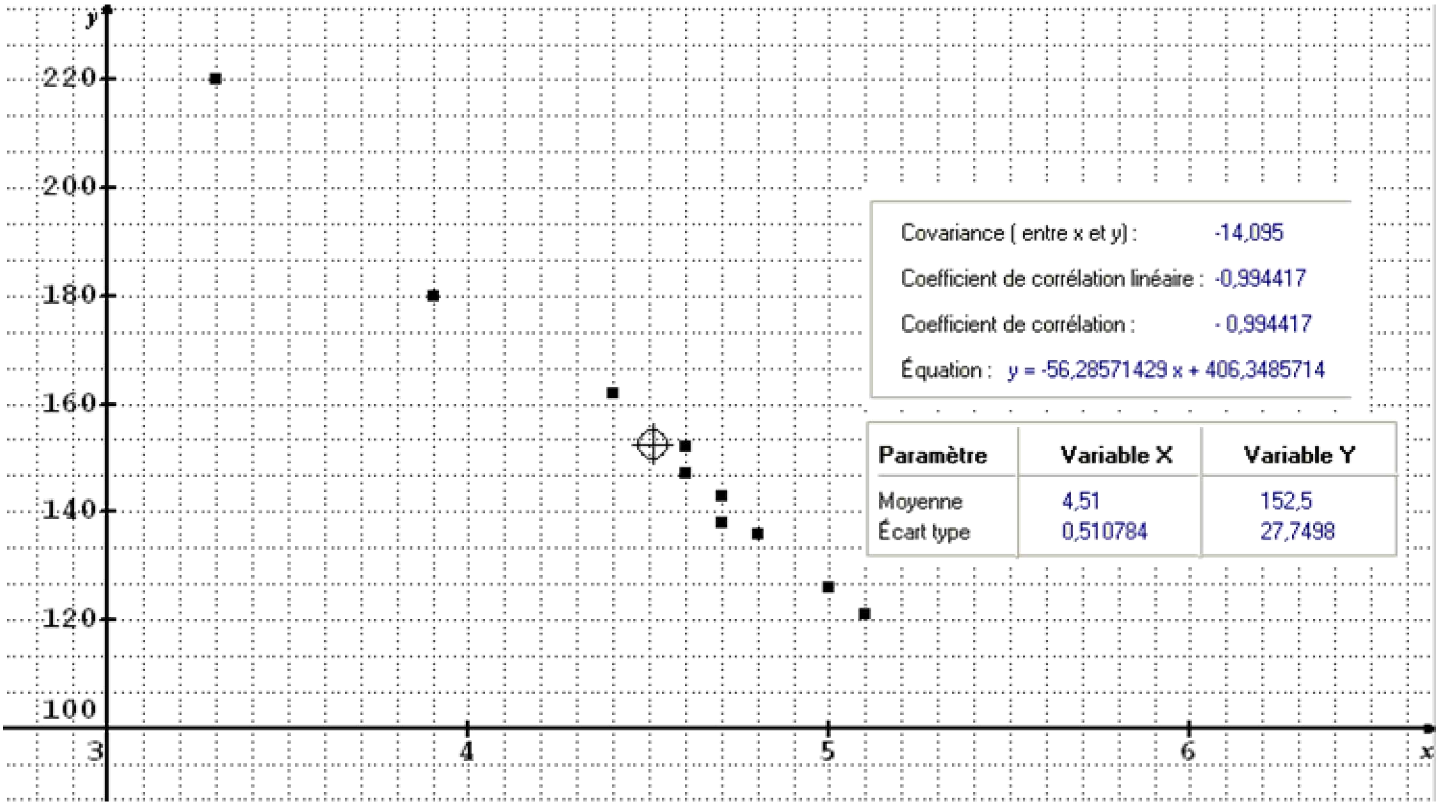
5) Placer le point moyen $G\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ dans le même repère

6) Comment semble réparti le nuage de points de par et d'autre du point G ? Commentez !

7) Existe-il un lien entre les variations de X et Y

8) Calculer la variance et l'écart-type de chacune des variables X et Y

Correction :



III°/ Ajustements Linéaires :

1) Coefficient de corrélation linéaire :

a) Définition **:** On appelle coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y) , le réel r définie par : $r(X,Y)=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

b) Propriétés :

- Si $r(X,Y)=0$ alors X et Y sont non corrélés (X et Y ne sont pas liées par une relation affine autrement un tel ajustement affine n'est pas possible)
- Si $r(X,Y)\neq 0$ alors X et Y sont corrélés et un tel ajustement est possible. (Les ajustements affines ou linéaires ainsi que les non linéaires seront possibles sous des conditions sur r)
- $-1\leq r(X,Y)\leq 1$
- Si $|r(X,Y)|=1$ alors il y a une dépendance totale entre X et Y. L'une est une fonction affine de l'autre.
- Si $|r(X,Y)|<0,75$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est faible (On s'intéresse souvent d'autres ajustement non affines)
- Si $|r(X,Y)|\geq 0,75$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est forte
- Si $|r(X,Y)|\in\,]0,95;1]$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est très forte (Les ajustements non linéaires non aucune importances)

c) Théorème (admis)

Soient X et Y deux variables d'une série statistiques quantitatives

Lorsque le coefficient de corrélation linéaire vérifie: $0,70\leq|r(X,Y)|\leq 1$, ou lorsque Le Nuage De Points à Une Forme Allongée, alors il est possible d'approcher la liaison entre X et Y par deux fonctions affines représenter graphiquement par deux droites passant par le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$

2) Méthode de Mayer (Réf 280)

Activité :

Le tableau suivant donne le PNB (en euros, par habitants) ainsi que le nombre d'hôpitaux (pour 1 million d'habitants) dans quelques pays européens.

Pays	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
x_i = PNB en euros par habitant	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
y_i = Nombre d'hôpitaux par million d'habitants	620	1080	1550	2100	3000	3250	3800	4200

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X, Y).

Unités graphiques :

- En abscisses : 7 cm pour 10000 euros.
- En ordonnées : 1,5 cm pour 400 hôpitaux.
- On prendra pour origine le point (5000 ; 500).

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.

3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Un ajustement affine est-il justifié ?

4) Un premier ajustement affine : la Droite de Mayer

Dans cette question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux pays $P1$,
$P2$, $P3$ et $P4$ et celui constitué des points correspondants aux pays $P5$, $P6$, $P7$ et $P8$.

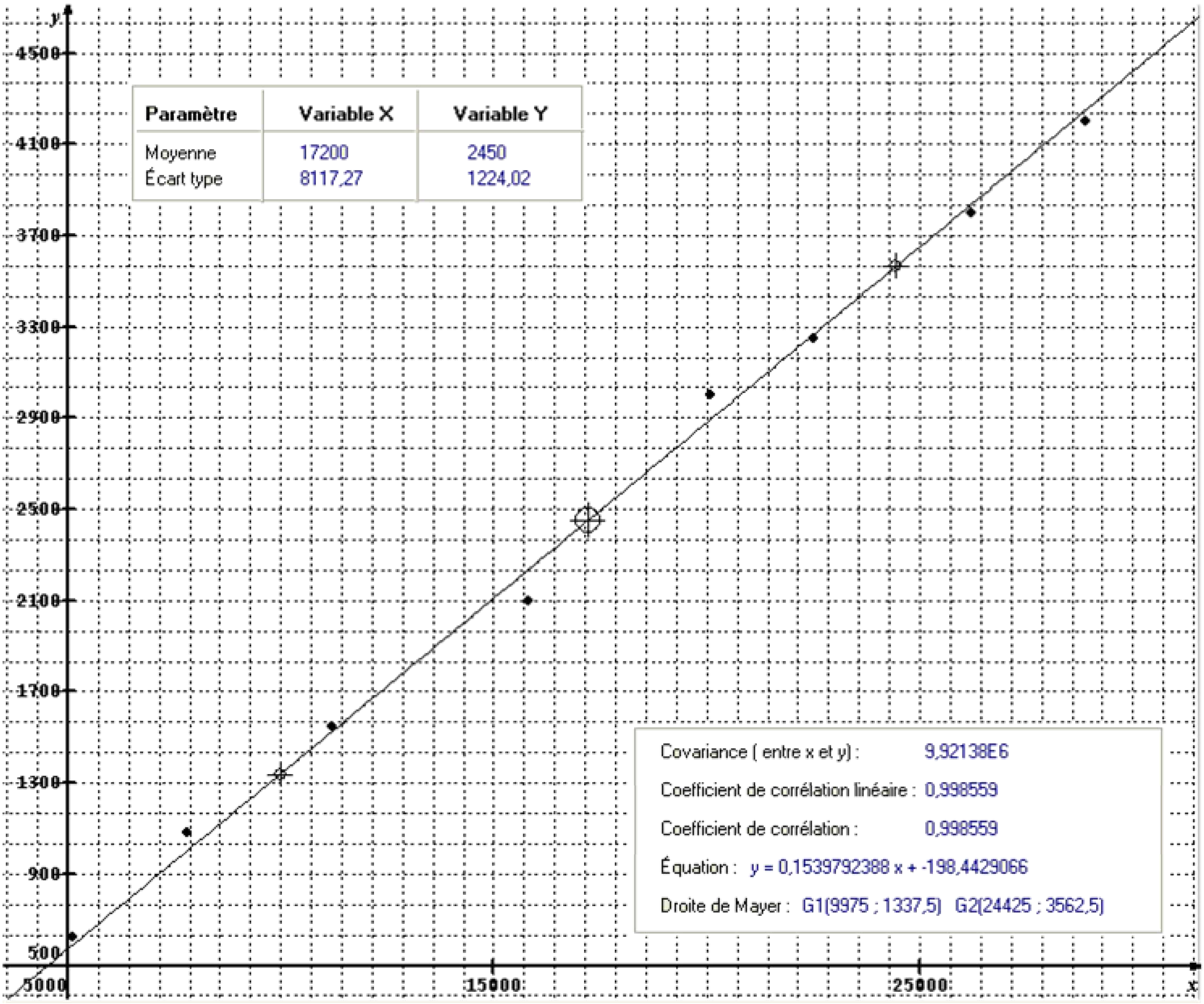
Ø Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique.

Ø Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = mx + p$ est : $Y = 0,1539X - 198,4429$ (On détaillera les calculs).

(On arrondira m et p à 10^{-4} près)

La droite $(G1G2)$ s'appelle la "droite de Mayer". Représenter cette droite sur le graphique.

Correction :



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Commentaires

a) Le principe d'ajustement affine par la méthode de Mayer consiste à partager le nuage associé à une série (x_i, y_i) en deux nuages dont le nombre de points diffère d'au plus un. On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs du première et du deuxième nuage. La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer

5) Un deuxième ajustement affine : la Droite de Régression : Méthode des moindres carrés.

a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On notera D cette droite. Représenter D sur la graphique.

b) Laquelle des deux droites (G_1G_2) et D réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?

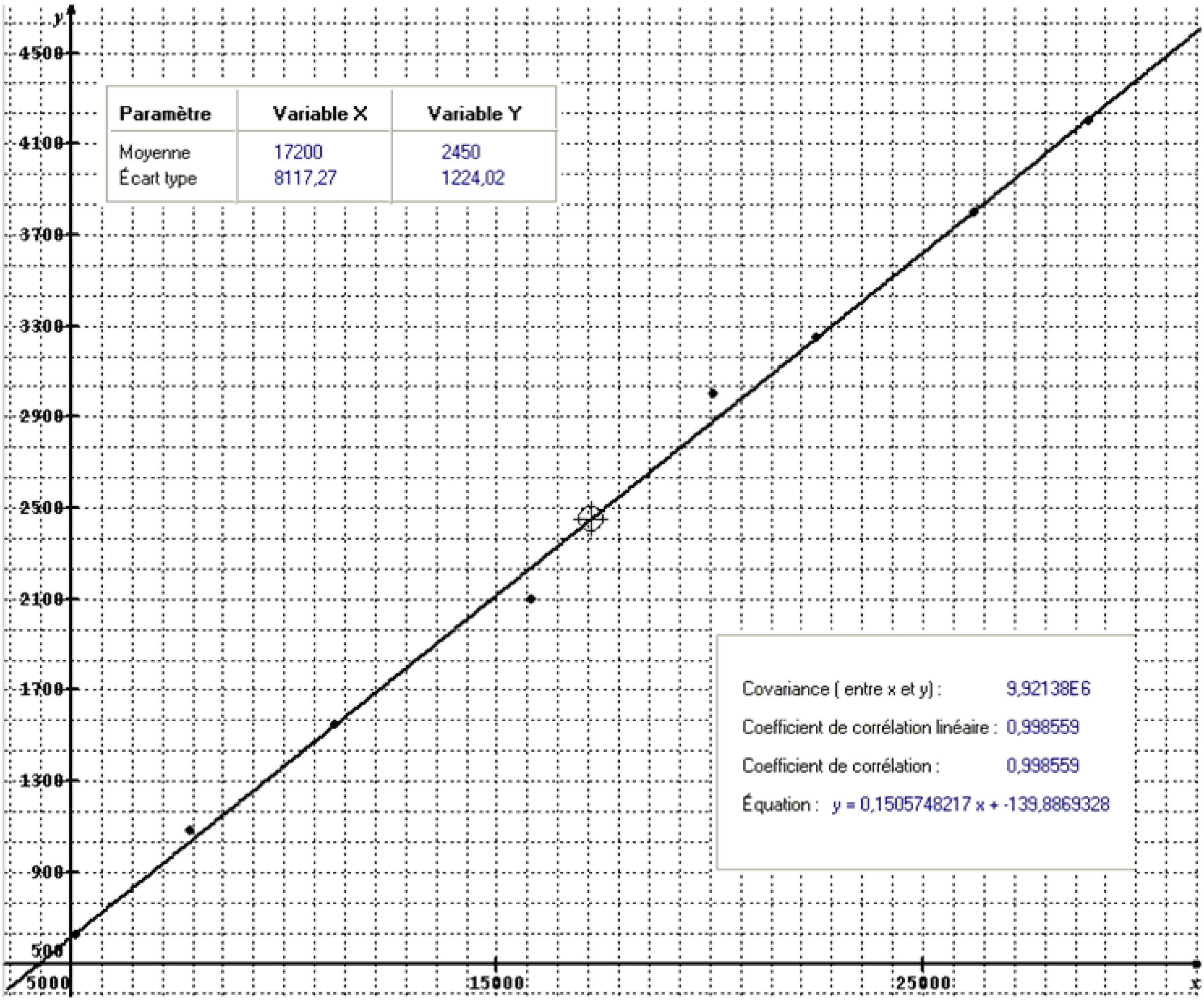
6) Estimations. À l'aide de l'équation de la droite (D) (ou à défaut celle de (G_1G_2)), et en détaillant les calculs,

Répondre aux deux questions suivantes :

a) Un pays a un PNB de 23400 € par habitant. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux (par million d'habitants) dans ce pays ? (On arrondira à l'unité près)

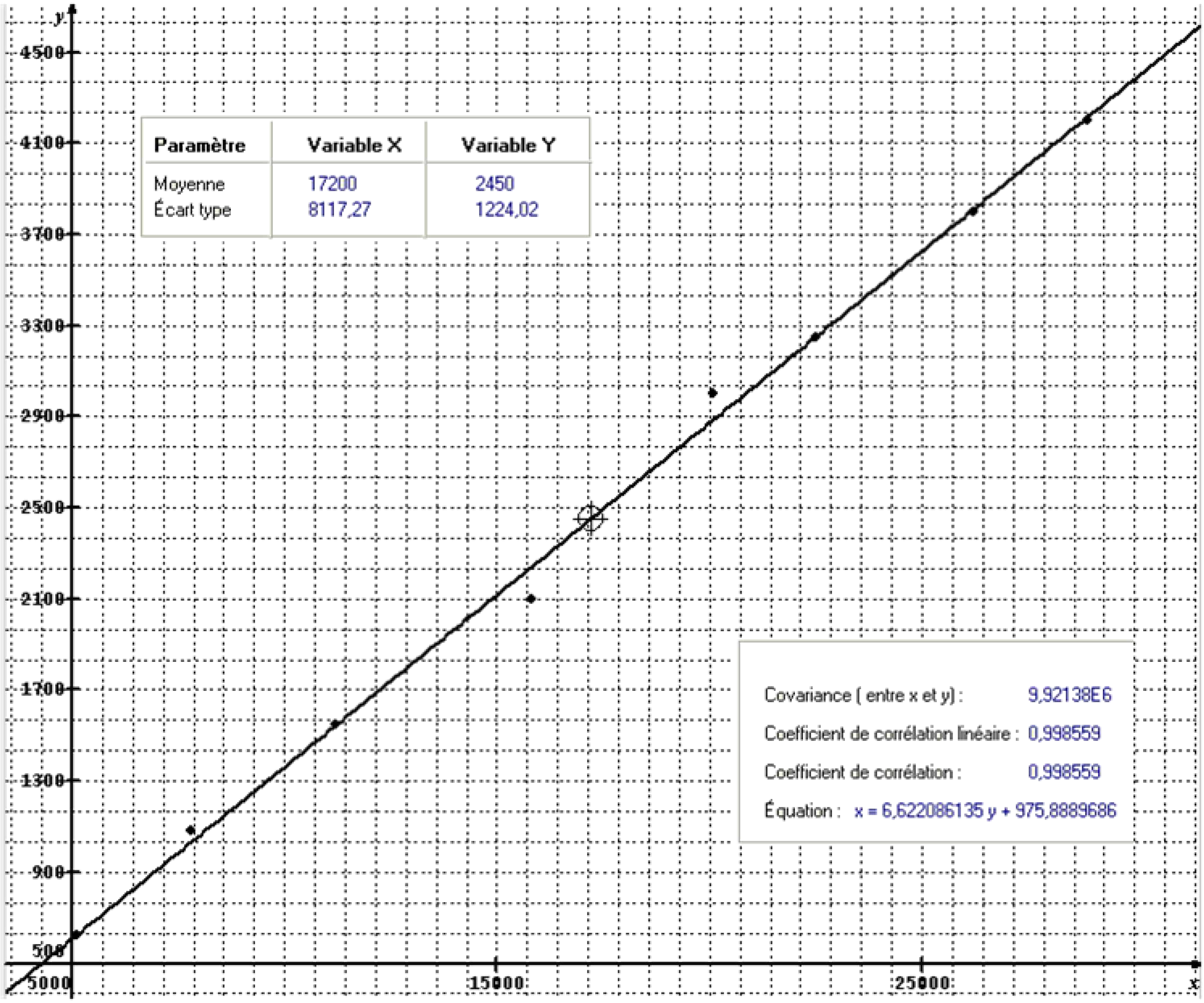
b) Un pays a 3500 hôpitaux par million d'habitants. À combien peut-on estimer son PNB (en €, par habitants) ? (On arrondira à l'euro près)

Correction :


y
4500
4100
3700
3300
2900
2500
2100
1700
1300
900
500
5000
15000
25000
x
Paramètre | Variable X | Variable Y
Moyenne | 17200 | 2450
Écart type | 8117,27 | 1224,02
Covariance (entre x et y) : 9,92138E6
Coefficient de corrélation linéaire : 0,998559
Coefficient de corrélation : 0,998559
Équation : y = 0,1505748217 x + -139,8869328

Remarque :

On peut faire une régression de X en Y



Commentaires

Théorème et définition :

Ø Lors d'un ajustement affine de Y en X par la méthode des moindres carrées la droite obtenue passe le point moyen du nuage et a pour équation : $y = \left(ax - \overline{X}\right) + \overline{Y}$ où $a = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}$

Ø Cette droite s'appelle la droite de régression de Y en X

Ø La droite de régression de X en y obtenue par la méthode des moindres carrés, lors d'un ajustement affine, passe par le point moyen du nuage et à pour équation : $x = \left(ay - \overline{Y}\right) + \overline{X}$ où

$a' = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)}$

Remarque :

Les deux droites de régressions de Y en X et de X en Y passent par le point moyen $G\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$

Les deux coefficients a et a' sont de même signe et le coefficient de corrélation r vérifie $r^2 = aa'$

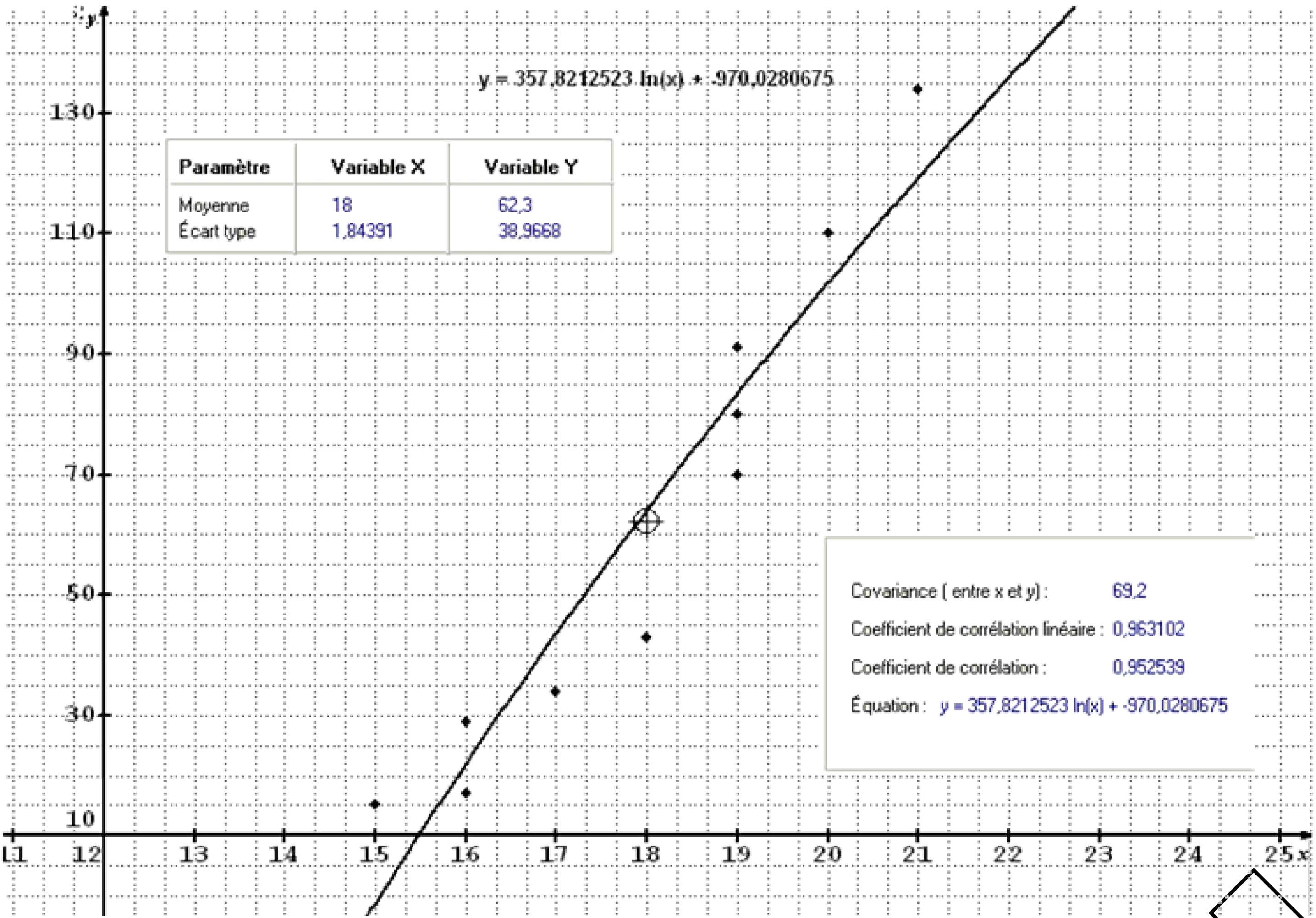
Exemple d'ajustement non linéaire

F Ajustement logarithmique : (Réf 296) (EX 13)

Soit le tableau suivant :

X_i	18	20	19	16	19	16	19	21	15	17
Y_i	43	110	70	17	91	29	80	134	15	34

Correction



- Ajustement hyperbolique : (Réf 297) (EX 14)
- Ajustement exponentiel : (Réf 286) (EX 1)
- Ajustement parabolique : (Réf 286) (EX 1)