

1.1 Un peu de vocabulaire

- Un **graphe** est un schéma constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes**.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées (fléchées). On distingue alors le sommet **origine** de l'arête et son **extrémité**.
- Deux sommets reliés par au moins une arête sont dits **adjacents**.
- Une arête partant et arrivant au même sommet est appelée **boucle**.

1.2 Ordre d'un graphe, degré des sommets

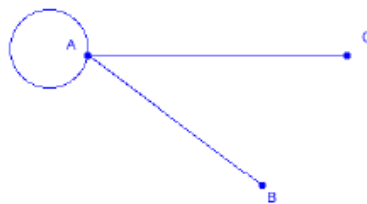
Activité 2 (Vocabulaire sur les graphes) : Graphe non orienté.

Définitions :

- L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Dans un graphe, le **degré de chaque sommet** est le nombre d'arêtes dont il est l'une des extrémités.

Remarque : **Attention!** Il ne faut pas oublier de compter *deux fois* les boucles, car le sommet est deux fois l'extrémité de cette arête.

Exemple : Dans le graphe de la figure 1, le degré du sommet A est **4**.

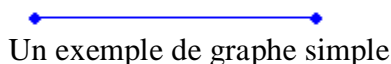


Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au *double* du nombre total d'arêtes de ce graphe.
En particulier, c'est un nombre **pair**.

1.3 Graphe simple, graphe complet

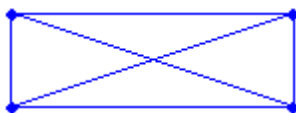
Définition : On ne considère que des graphes non orientés.

Un **graphe simple** est un graphe *sans boucle* dont chaque couple de sommets est relié par *au plus* une arête.



Un exemple de graphe simple

Définition : . Un **graphe complet** est un graphe *simple* dont tous les sommets sont adjacents.



Le graphe complet d'ordre 4

Remarques :

1. Tout graphe **complet** est **connexe**.
2. Si un graphe n'est pas connexe, il ne peut pas être complet.

2. Chaînes d'un graphe

Définitions :

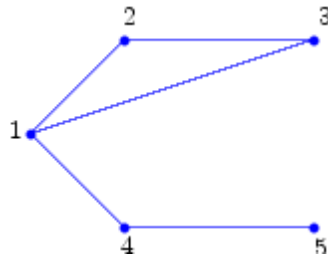
- Dans un graphe simple une **chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.
- Dans un graphe *orienté*, une **chaîne** est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité de l'une est l'origine de l'autre.
- Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident, et qui est composée d'arêtes **toutes distinctes**.



– La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la constituent.

3.1 Graphe connexe

Définition : Un graphe est **connexe** si on peut relier deux *quelconques* de ses sommets par une **chaîne** (éventuellement réduite à une arête).



Un graphe connexe

Remarques :

1. Tout graphe **complet** est **connexe**.
2. Si un graphe n'est pas connexe, il ne peut pas être complet.

Définitions : Soit G un graphe **connexe**.

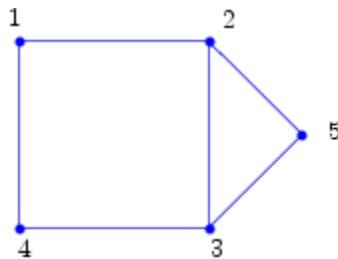
1. On appelle **distance** entre deux sommets du graphe la **longueur de la plus courte chaîne** qui relie ces deux sommets.
2. On appelle **diamètre du graphe** la **plus grande distance** constatée entre deux sommets quelconques du graphe.

3.2 Chaîne eulérienne, cycle eulérien

Définition 1 : Une **chaîne eulérienne** est une **chaîne** satisfaisant aux conditions suivantes :

- elle contient **toutes** les arêtes du graphe ;
- chaque arête n'est décrite **qu'une seule fois**.

Remarque : On peut donc passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

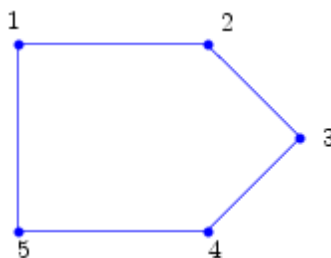


Graphe contenant une chaîne eulérienne

Définition 2 : Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

Définition 3 : On appelle **graphe eulérien** un graphe que l'on peut dessiner **sans jamais lever le crayon** et **sans passer deux fois** par la même arête.

Propriété : Un graphe est eulérien *si et seulement si* il contient une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.



Graphe contenant un cycle eulérien



3.3 Théorème d'Euler

Théorème d'Euler :

1. Un graphe admet un **cycle eulérien** si et seulement si il est **connexe** et n'a **aucun sommet de degré impair**.
2. Un graphe admet une **chaîne eulérienne** entre les sommets x et y si et seulement si il est **connexe** et si x et y sont les **deux seuls sommets de degré impair**.

4 Coloriage des sommets d'un graphe

Définitions :

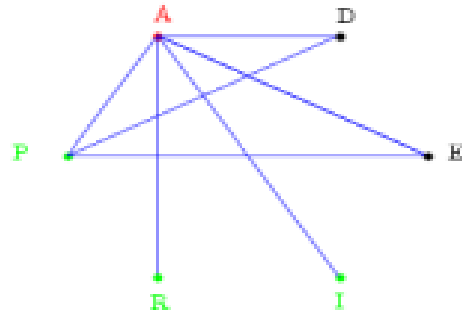
1. **Colorier** un graphe consiste à affecter une couleur à chacun des sommets de sorte que deux sommets **adjacents** ne soient pas de la même couleur.
2. Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le colorier. On le note $\chi(G)$.

Propriété : Soit D le degré maximal des sommets du graphe G .

Alors : $\chi(G) \leq 1 + D$.

4.1 Algorithme de Welsh-Powell

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit



- Sommet P : degré 3
- Sommet A : degré 5
- Sommet D : degré 2
- Sommet E : degré 2
- Sommet I : degré 1
- Sommet R : degré 1

d'où la liste ordonnée des sommets :

Sommet **A** **P** **D** **E** **I** **R**

Degré 5 3 2 2 1 1

2. On choisit une couleur pour le premier sommet (ici, le sommet A)
3. On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet A et qui ne sont pas adjacents entre eux. Ici, il n'y en a pas.
4. On réitère ce procédé avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste : ici, le sommet P, et on peut colorier de la même couleur les sommets R et I.
5. On recommence jusqu'à épuisement des sommets : ici, on choisit une couleur pour le sommet D et on peut colorier le sommet E de la même couleur.

4.2 Cas d'un graphe complet

Propriété : Le **nombre chromatique** d'un graphe **complet** est égal à l'**ordre de ce graphe**.

Propriété : Le **nombre chromatique** d'un graphe G est supérieur ou égal à l'**ordre du sous-graphe complet** de G le plus **grand**.

5 Matrice associée à un graphe

5.1 Définitions

Définition 1 :

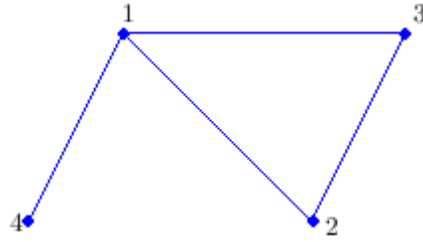
La **matrice associée à un graphe non orienté** d'ordre n est une matrice d'ordre n .

Le coefficient situé à l'intersection de la i ème ligne et de la j ème colonne est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i du graphe au sommet j .



Exemple : La matrice associée au graphe ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1. La matrice associée à un graphe simple est toujours une matrice **symétrique**.
2. On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice associée au graphe. Pour un graphe non orienté *ne comportant pas de boucle*, il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne (ou sur la colonne) correspondante au sommet.

Définition 2 :

La **matrice associée à un graphe orienté** d'ordre n est une matrice d'ordre n .

Le coefficient situé à l'intersection de la i ème ligne et de la j ème colonne est égal au nombre d'arêtes **d'origine** le sommet i du graphe et **d'extrémité** sommet j .

