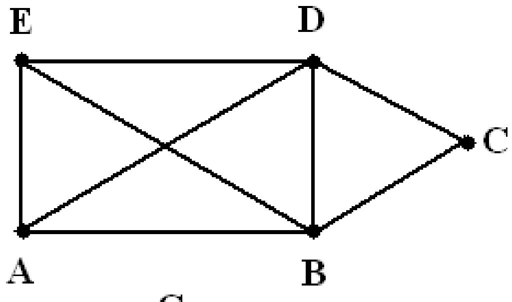
I. Graphe Non Orienté Simple

Soit le graphe **G** ci-dessous



G

☞ Un **graphe non orienté simple** est la donnée d'un ensemble **fini**, **non vide**, de points appelés **sommets** et d'un ensemble de liens entre deux sommets, appelés **arêtes,** deux sommets étant reliés par au plus une arrête (une arête reliant A et B est une paire {A, B} ou simplement A–B)

☞ Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
Exemple : A et B sont adjacents mais A et C ne le sont pas

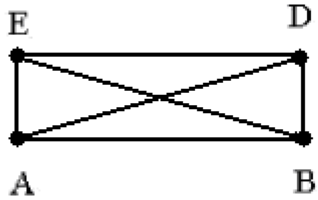
☞ L'**ordre** d'un graphe est le nombre de **sommets** de ce graphe
Exemple : l'ordre de **G** est égal à 5

☞ Le **degré** d'un **sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité
Exemple : le degré de A est égal à 3 et celui de C est égal à 2

☞ Un graphe **complet** est un graphe tel qu'il existe toujours une arête entre deux sommets quelconques
Exemple : G n'est pas complet car A n'est pas relié à C par une arrête

☞ Un **sous graphe** d'un graphe G est un graphe G' composé de **certains** sommets de G ainsi que de **toutes** arêtes qui le relient

☞ Un sous graphe **stable** est un sous graphe sans arête (les sommets sont dits **isolés**)
Exemple : Le sous graphe ci-dessous est un sous graphe de **complet G**



I) Lemme des poignées de mains

La **somme** des **degrés** des **sommets** d'un graphe non orienté est égale à **deux** fois le nombre **d'arêtes** du graphe

Application : Pour le graphe G : On a :

$$\text{Deg}(A) + \text{Deg}(B) + \text{Deg}(C) + \text{Deg}(D) + \text{Deg}(E) = 3 + 3 + 4 + 4 + 2 = 2\times 8 = 16$$

Remarque : **Deg** veut dire degré ; une notation non adaptée dans le chapitre

☞ Une **chaîne** est une liste ordonnée de **sommets** telle que chaque sommet de la liste est **adjacent** au suivant.
Exemple A–B–C–D est une chaîne

☞ La **longueur** d'une chaîne est le **nombre d'arêtes** qui la composent
Exemple A–B–C–D est de longueur égale à 3

☞ Une chaîne est **fermée** lorsque l'origine et l'extrémité sont confondues
Exemple A–B–C–D–A est une chaîne fermée

☞ Un **cycle** est une chaîne fermée dont toutes les **arêtes** sont **distinctes**
Exemple A–B–C–D–B–A est une chaîne mais n'est pas un cycle

- La **distance** entre deux sommets est la plus **courte longueur** des **chaînes** qui le relient.
  Exemple la distance entre A et C est la longueur de la chaîne A–B–C qui est 2
- Le **diamètre** d'un graphe est la **plus grande distance** entre deux **sommets** du graphe
  Exemple le **diamètre** de G est la **distance** entre A et B ou entre E et D qui est 4
- Un graphe est **connexe** s'il existe toujours une chaîne entre deux sommets distincts.
  Exemple le graphe G est connexe
- Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une **fois et une seule** chaque arête du graphe
  Exemple : E–B–C–D–B–A–D–E–A est une **chaîne eulérienne** de G
- Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérien fermée

2) Théorème (1) de l'Euler (admis)

Un graphe <u>connexe</u> admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de <u>sommets</u> de degrés <u>impairs</u> vaut 0 ou 2.

3) Théorème (2) de l'Euler (admis)

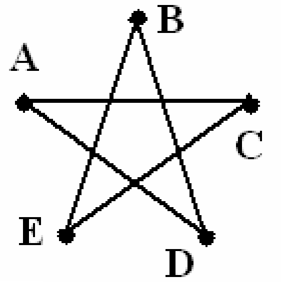
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs

Remarque :

Si un graphe connexe admet <u>deux sommets de degrés impairs</u>, alors ils sont nécessairement les <u>extrémités</u> de la chaîne <u>eulérienne</u>.

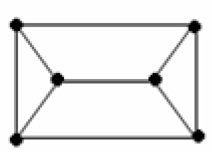
Exemple :

1. Le graphe G ne contient pas de cycle Eulérien
2. Le graphe suivant admet **un** cycle Eulérien : **A–C–E–B–D–A** (En effet il est connexe et tous les sommets sont de degrés paire)



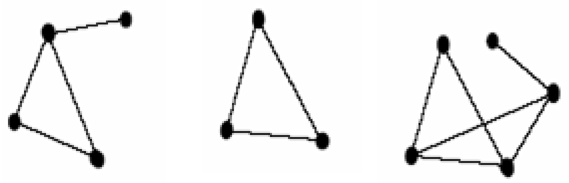
Exercice n°1

Peut – on dessiner les graphes ci-contre, sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête ?



Exercice n°2

Dire, en justifiant, si chacun des graphes suivants admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien et donner, dans l'affirmative, un exemple de telle chaîne ou de tel cycle



4) Matrice associe à un graphe non orienté

a) Définition

La matrice associée à un graphe non orienté à n sommets S_1, S_2, …….S_n est une matrice carrée $M = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ où le terme a_{ij} est égale à **1** si S_i est adjacent à S_j et 0 si non¨

Exemple : la matrice associée à G est de la forme :

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On la note par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Commentaire :

$a_{12} = 1$ car A est adjacent à B (Il y a une arrête entre A et B)

c) Remarque :

La matrice associée à un graphe non orienté est symétrique par rapport à la 1ère diagonale

La somme de tous les termes de la matrice associée à un graphe non orienté est égale à la somme des degrés du graphe correspondant. (On a : $1 \times 16 = 16$ et 16 correspond à la somme des degrés du graphe G)

d) Propriété

Soit M la matrice associée à un graphe non orienté dont, les sommets sont numérotés de 1 à n.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ le terme a_{ij} de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

Exemple: Si on calcule M^p on aura:

1) Pour $p = 2$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Pour $p = 3$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 & 9 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

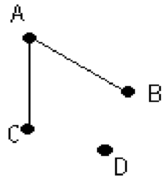
e) Commentaires:

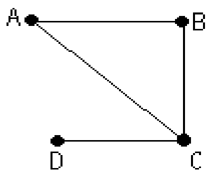
Si $p = 2$ alors G admet 3 chaînes de longueur 2 reliant D à B

Si $p = 3$ alors G admet 9 chaînes de longueur 3 reliant D à B

Exercice

1) Donner la matrice associée à chacun des graphes suivants :





2) Représenter un graphe dont la matrice associée est :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) Coloriage D'un Graphe

a) Définition

Colorier un graphe consiste à attribuer une couleur à chaque sommet de façon à ce que deux sommets adjacents ne soit pas coloriés de la même couleur.

Un même graphe G peut être colorié de plusieurs façons différentes.

On appelle nombre chromatique d'un graphe G, le plus petit nombre de couleurs nécessaires à la coloration de G. On note $\gamma(G)$

b) Propriété

Le nombre chromatique d'un graphe G est inférieur ou égal à Δ +1 où Δ (On note aussi **r** au lieu de Δ) est le plus grand degré des sommets

Le nombre chromatique d'un graphe G est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous graphes

Le nombre chromatique d'un graphe **complet** d'ordre n est n.

Exercice 1 : organisation d'un examen

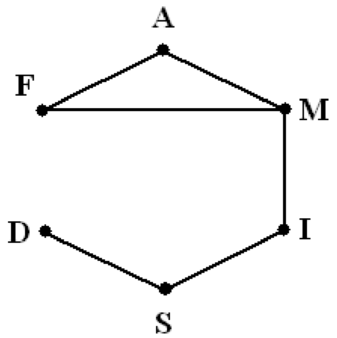
On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 6 matières d'options : Français (**F**), Anglais (**A**), Mécanique (**M**), Dessin industriel (**D**), Internet (**I**), Sport (**S**) ; les profils des candidats à options multiples sont :

F, A, M	**D, S**	**I, S**	**I, M**

1) Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?
2) Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

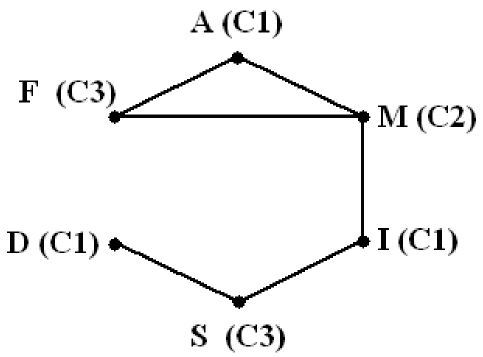
Solution

Le graphe associé à cette situation est le suivant :



1) Tout sous-graphe de plus de trois sommets comporte des arêtes ; deux sous-graphes d'ordre trois (de sommets respectivement A, D, I et F, D, I) n'ont pas d'arêtes : le nombre maximum d'épreuves en parallèle est 3.

2) Il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 ; le nombre chromatique est au moins égal à 3 ; on voit que 3 couleurs suffisent. (Ci : couleur numéro i)

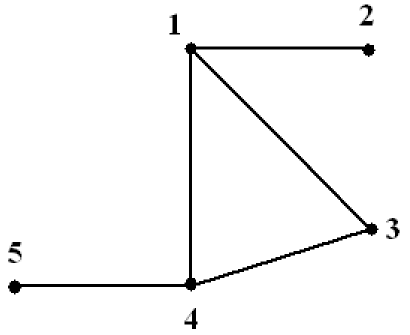


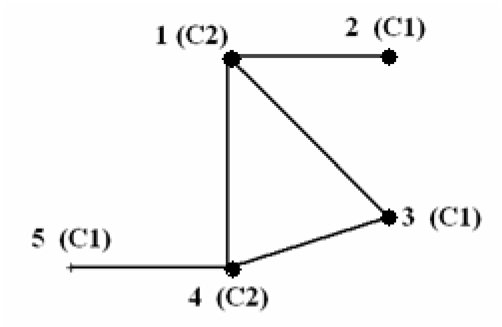
Exercice 2 : ouvertures de magasins

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4. Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

Solution

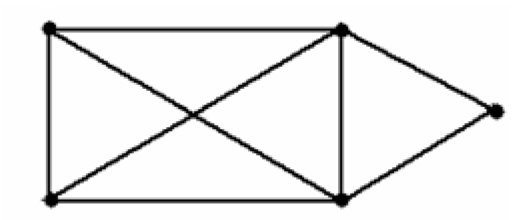
Il n'y a qu'un seul sous-graphe a trois éléments sans arêtes ; tous les sous-graphes d'ordre 4 ou 5 ont des arêtes.

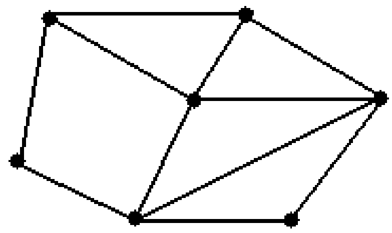




Exercice N°3

Colorier les graphes suivants :





II. Graphe Orienté Simple

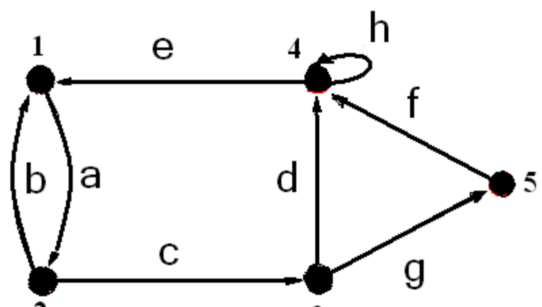
☞ Un **graphe simple orienté** est un graphe dont les arêtes appelées **arcs** sont orientées:

☞ Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées : on parle alors de **l'origine** et de **l'extrémité** d'une arête.

☞ Une **boucle** est une arête orientée dont **l'origine** et **l'extrémité** sont les **mêmes**.

☞ On définit de même une chaîne orientée, une chaîne eulérienne orientée, un cycle orienté...

- Le graphe **A** ci-dessous est orienté.



Graphe A

☞ Une **boucle** est un arc dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes

- L'arête **a** qui va de 1 vers 2 est distincte de l'arête **b**, qui va de 2 vers 1. L'arête **h** est une **boucle**.

☞ Dans un graphe orienté un **chemin** est toute suite finie de sommets tels que chacun d'eux est relié au suivant par un arc

- (1-2-3-5) est une **chaîne orientée** qui va de 1 à 5. (**e/a/c/d**) est un **cycle orienté**.

☞ Un chemin fermé s'appelle **circuit**

- (a–c–d–e) est un **circuit**.

☞ La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs qui le composent

- (a–c–d–e) est un chemin de longueur 4.(suffit de compter les lettres a, c, d et e)

I) Matrice associée à un graphe orienté

a) Définition :

Soit G un graphe dont les sommets sont : S1, S2, …..Sn . On appelle matrice associée au graphe G, la matrice carrée d'ordre n, $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ où le terme a_{ij} est le nombre d'arcs d'origine S_i et d'extrémité S_j

- Ci-dessous, on a la matrice associée au graphe **A** précédent.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Propriétés

☞ Si $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice associée à un graphe orienté, alors la somme des termes de M est égale au nombre d'arcs du graphe

☞ Si $a_{ij} = 0$ pour tout **i**, $1 \leq i \leq n$, (la colonne numéro j n'a que des zéros) cela signifie qu'aucun arc n'arrive au sommet numéro j

☞ Si $a_{ij} = 0$ pour tout **j**,$1 \leq j \leq n$, (la ligne numéro **i** n'a que de zéros) cela signifie q'aucun arc **ne part** du sommet numéro i

☞ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ est le nombre d'arcs **aboutissants** au sommet numéro **j**

☞ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ est le nombre d'arcs **issus** du sommet numéro **i**

☞ La matrice M indique le chemin de longueur 1, reliant de sommet du graphe

☞ Le terme a_{ij} de M^n est égal au nombre de **chemins** de longueur n reliant le sommet numéro **i** au sommet numéro **j**

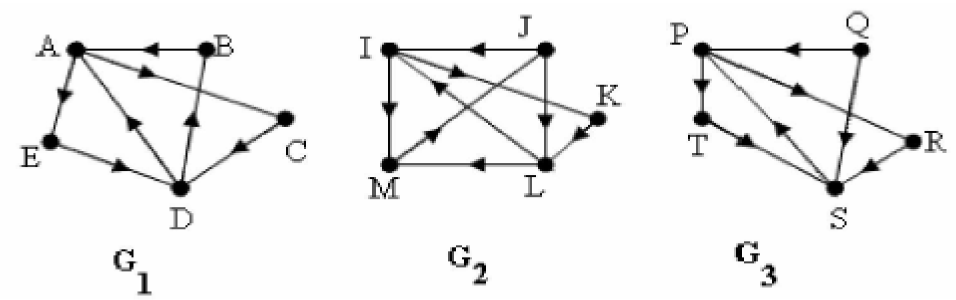
Exemple

Retrouver tous les résultats de la propriété en se servant du graphe A précédent

☞ ……………………………………………………………………………………………..
☞ ……………………………………………………………………………………………..
☞ ……………………………………………………………………………………………..
☞ ……………………………………………………………………………………………..
☞ ……………………………………………………………………………………………..
☞ ……………………………………………………………………………………………..
☞ ……………………………………………………………………………………………..

Exercice

3) Donner la matrice associée à chacun des graphes suivants :



4) Représenter un graphe orienté dont la matrice associée est :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Théorème (admis)

Soit G un graphe connexe orienté

Pour tout sommet S de G. On note : $d^{+}(S)$ le nombre d'arcs **sortant** de S

$d^{-}(S)$ le nombre d'arcs **rentrant** à S

☞ G admet un cycle orienté eulérien si et seulement si pour tout sommet S de G ; $d^{+}(S)=d^{-}(S)$

☞ G admet une chaîne orientée eulérienne qui n'est pas un cycle orienté si et seulement si pour tout sommet S de G ; $d^{+}(S)=d^{-}(S)$ **sauf** pour **deux sommets exactement** A et B tels que:

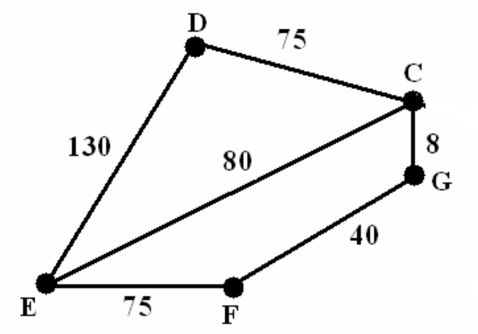
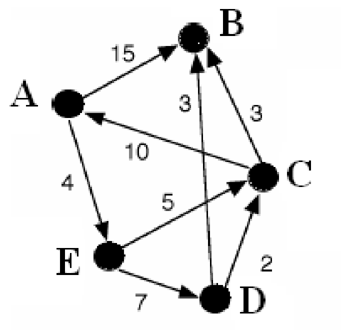
$d^{+}(A)=d^{-}(A)+1$ et $d^{+}(B)=d^{-}(B)-1$

d) Conséquences

☞ $d^{+}(S_i)$ est égal à la somme des termes de la $i^{ème}$ **ligne** de la matrice associée à ce graphe.

☞ $d^{-}(S_i)$ est égal à la somme des termes de la $i^{ème}$ **colonne** de la matrice associée à ce graphe

III. Vocabulaires de comparaisons entre les deux types de graphes (simple et orienté)

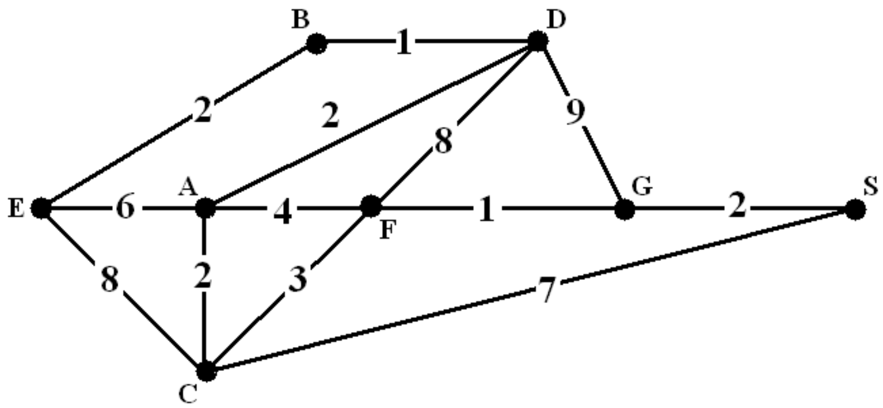
Graphe simple non orienté	Graphe simple orienté
▪ Un graphe simple non orienté **pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs appelés **poids**. ▪ Le **poids** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent ▪ Une plus courte **chaîne** entre deux sommets est, parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de **poids minimum**  	▪ Un graphe simple orienté **pondéré** est un graphe dont les arcs sont affectés de coefficients positifs appelés **coûts.** ▪ Le **coût** d'un chemin est la somme des coûts des arcs qui le composent ▪ Un plus court **chemin** entre deux sommets est, parmi les chemins qui les relient, un chemin de **coût minimum** 

IV. Recherche du plus courte chaîne

Algorithme DIJKTSRA :

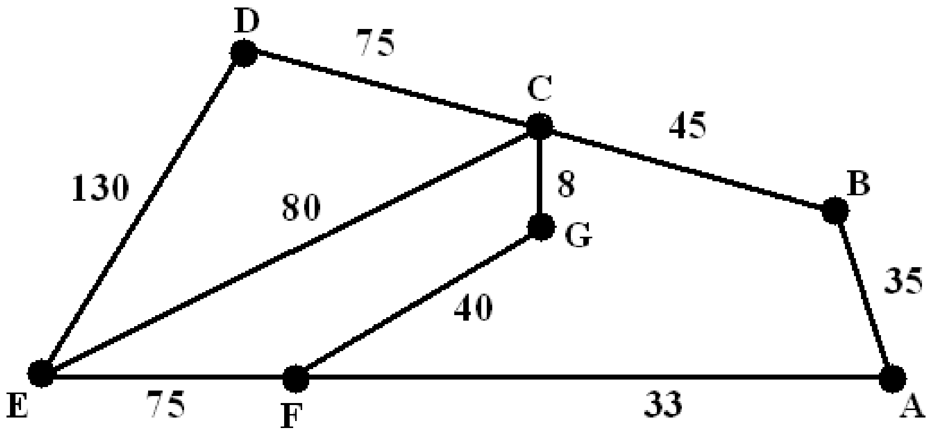
Exercice n°1 :

1. Déterminer le poids de la chaîne : **E–C–D–B**
2. En appliquant l'algorithme de Dijkstra, déterminer les plus courtes chaînes reliant le sommet E à n'importe quel autre sommet du graphe.
3. Donner les plus courtes chaînes et les poids de chacune de ces chaînes, reliant :
   - E à S
   - E à F
   - E à G



E	A	B	C	D	F	G	S	**Sommet Sélectionné**

Exercice n°2



Le graphe pondéré ci-dessus représente un réseau routier. Sur chacune de ses arêtes on a marqué la distance séparant les deux villes reliées par cette arête.

4. Déterminer le poids de la chaîne : **F–G–C–D**
5. En appliquant l'algorithme de Dijkstra, déterminer les plus courtes chaînes reliant le sommet A à n'importe quel autre sommet du graphe.
6. Donner les plus courtes chaînes et les poids de chacune de ces chaînes, reliant :
   - A à C
   - A à D
   - A à G

A	B	C	D	E	F	G	Sommet Sélectionné