Mathématiques aux élèves *Site web :* http://www.matheleve.net/ *Email :contact @matheleve.com*	*LIMITES DE FONCTIONS*	
	Cour(02)	*4 ème Inf*

I) Composée de deux fonctions

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

Définition

Soit *f* une fonction dont l'ensemble de définition est D et *g* une fonction dont l'ensemble de définition est $f(D)$. On appelle fonction composée de *f* et *g*, la fonction

notée $g\ o\ f$ et définie pour tout $x \in D$, par : (*gof*) (*x*) = *g* (*f* (*x*))

Théorème

Si *f* et *g* ont **même sens** de variation, alors gof est **croissante** sur sur I.

Si f et *g* ont des sens de variations **contraires**, alors gof est **décroissante** sur I.

Fonctions associées

$g(x) = f(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	$C_g = t_{k\vec{j}}(C_f)$
$h(x) = f(x+\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$C_h = t_{-\lambda\vec{i}}(C_f)$
$k(x) = -f(x)$	$C_k = S_{(x\,x')}(C_f)$
$l(x) = f(-x)$	$C_l = S_{(y\,y')}(C_f)$

Limite finie en a (a réel)

Remarques

Si une fonction admet une limite en *a*, cette limite est unique

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right)$$

Théorème

* *f* est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

* Si, pour $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, où g est une fonction définie en a et telle que $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. alors f admet une limite en a, et $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Limite en $+\infty$ou $-\infty$

Théorème

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.

A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes.

du plus haut degré.

Opérations sur les limites

$\lim_{x\to a} f$ \ $\lim_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$\lim_{x\to a} f$ \ $\lim_{x\to a} g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

si $\ell' = 0$, on ne peut conclure que lorsque g garde un signe constant au voisinage de a

Les situations marquées ? sont appelées **formes indéterminées**

Limite d'une fonction composée

a, b, l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = l$, alors $\lim_{x\to a} gof(x) = l$

Asymptote verticale

Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C sa courbe représentative.

Si $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote

verticale pour la courbe *C*

Asymptote horizentale

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et *C* sa courbe

représentative.

Définition :

Si la limite de *f(x)* est un nombre L, quand *x* tend vers $+\infty$, (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y = \mathrm{L}$ est une asymptote horizontale pour *C* en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Asymptote oblique

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, *C* sa courbe

représentative et *D* une droite d'équation $y = ax + b$ dans un repère

droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour *C* en $+\infty$ (ou $-\infty$).

Méthode

1) Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

2) a) Pour montrer qu'une droite donnée *D* d'équation $y = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote

oblique , on calcule la différence $d(x) = f(x) - (ax + b)$; on étudie la limite à l'infini de

$d(x)$ et on doit trouver 0.

b) Pour étudier la position relative de *C* et de *D* , on étudie le signe de $d(x)$.