Mathématiques aux élèves
Site web : http://www.matheleve.com/
Email :contact @matheleve.com

LIMITES DE FONCTIONS

Cour | *4 ème Inf*

I) Composée de deux fonctions

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Définition

Soit *f* une fonction dont l'ensemble de définition est D et *g* une fonction dont l'ensemble de définition est $f(D)$. On appelle fonction composée de *f* et *g*, la fonction

notée $g\ o\ f$ et définie pour tout $x \in D$, par : (*gof*) (x) = *g* (*f* (x))

2) Théorème

Si *f* et *g* ont **même sens** de variation, alors gof est **croissante** sur I.

Si f et *g* ont des sens de variations **contraires**, alors gof est **décroissante** sur *I.*

II) Fonctions associées

$g(x)=f(x)+k \quad k\in \mathbb{R}$	$C_g = t_{k\vec{j}}(C_f)$
$h(x)=f(x+\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$C_h = t_{-\lambda\vec{i}}(C_f)$
$k(x)=-f(x)$	$C_k = S_{(xx')}(C_f)$
$l(x)=f(-x)$	$C_l = S_{(yy')}(C_f)$

III) Limite s

1) Limite finie en a (a réel)

Remarque

Si une fonction admet une limite en *a*, cette limite est unique

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right)$$

Théorème

* *f* est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

* Si, pour $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ où g est une fonction définie en a et telle que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. alors *f* admet une limite en a, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a)$.

2) Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

Théorème

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.

A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes.

du plus haut degré.

3) Opérations sur les limites

Somme

a (a réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) .

$\lim_{x\to a} f$ \ $\lim_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$

Les situations marquées **?** sont appelées **formes indéterminées**

Produit

$\lim_{x\to a} f$ \ $\lim_{x\to a} g$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell\neq 0$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Fonction composée

$a,\ b,\ l$ sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim_{y\to b} g(y)=l$, alors $\lim_{x\to a} gof(x)=l$

IV) *Asymptotes*

1) Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C sa courbe représentative.

Si $\lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$, alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote

verticale pour la courbe *C*

*Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

2) Asymptote horizontale

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et *C* sa courbe représentative.

Si la limite de *f(x)* est un nombre L, quand *x* tend vers $+\infty$, (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y = \mathrm{L}$ est une asymptote horizontale pour *C* en $+\infty$ (ou $-\infty$)

3) Asymptote oblique

*Soit *f* une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, *C* sa courbe représentative et *D* une droite d'équation $y = ax + b$ dans un repère

-Si la limite de la différence $f(x) - (ax + b)$ est nulle quand *x* tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour *C* en $+\infty$ (ou $-\infty$).

-Pour étudier la position relative de *C* et de *D* , on étudie le signe de $d(x)$.