

# Les Fonctions logarithmes

## La fonction logarithme népérien

### Définition :

La fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , est la primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en 1.

Donc :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

$\ln$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$e^{\ln x} = x \text{ avec } x > 0$$

$$\ln(e^x) = x$$

## Les propriétés de la fonction $\ln$

Pour tout  $x, y$  de  $\mathbb{R}_+^*$

$$\bullet \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad , \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln(x) \quad , \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad , \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$\bullet \text{ Pour tout } p \text{ de } \mathbb{Z} \text{ , } \ln(x^p) = p \cdot \ln(x)$$

## Dérivabilité et continuité de la fonction $\ln$

$\ln$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$\text{pour tout } x > 0, \text{ que } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

## Approximation affine au voisinage de 1

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Remarque, une équation de la tangente à la courbe  $C_{\ln}$  est :  $y = x - 1$

## Limites

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0^-$$

## Étude du sens de variation de $\ln$ et étude de la fonction $\ln \circ u$

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$  avec  $x > 0$  donc  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

Donc :

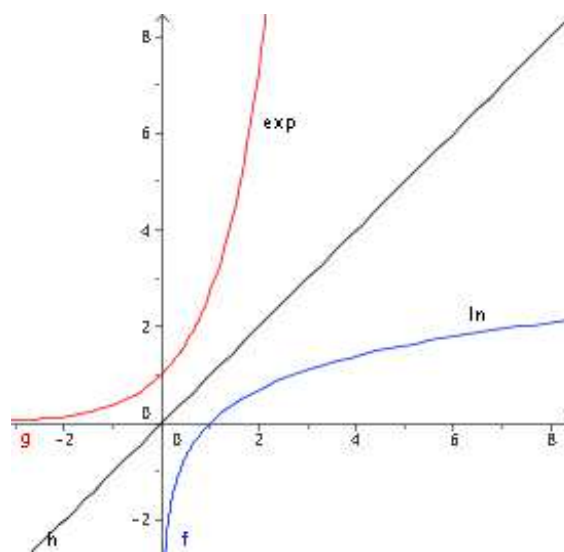
$$a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$$

$$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1, \quad \ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$

Si  $u$  est dérivable et strictement positive sur  $I$  alors  $f = \ln \circ u$  est définie et dérivable sur  $I$  et

$$\text{on a } \forall x \in I, f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



$C_{\ln}$  est le symétrique de  $C_{\exp}$  par la droite d'équation  $y=x$

## Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée  $\log$ , est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ .  
On a donc  $\log(1)=0$  et  $\log(10)=1$ .

Toutes les propriétés algébriques de la fonction  $\ln$  sont vérifiées par la fonction  $\log$ .  
En particulier, on a  $\log(10^n)=n$ .