|  |  |
| --- | --- |
| [**Mathématiques aux élèves**](http://www.matheleve.com/)Site web : <http://www.matheleve.com/>Email :contact @matheleve.com | **Probabilités sur un ensemble fini** |
| Cours  | 4 ème  Informatique |

**I) Probabilité sur un ensemble fini**

**1) Vocabulaire des événements**

Dans une expérience aléatoire, l'univers Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles.

\*Un événement est une partie de l'univers.

\*Un événement élémentaire est un événement possédant un seul élément.

\*Deux événements A, B, sont disjoints ou incompatibles si et seulement si A∩B = 0.

\*L'événement contraire d'un événement A est l'événement constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

**2) Calcul des probabilités**

\*La probabilité d'un événement d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

\*La probabilité de Ω est 1 (P (Ω) = 1)

\*La probabilité de ∅ est 0 (P (∅) = 0)

\*Pour tout événement A : 0 ≤ P(A) ≤ 1.

**Propriétés**

\*Pour tout événement A, 0 ≤ P(A) ≤ 1

\*Pour tous événements A et Bon a P (A U B) = P(A) + P(B) - P (A ∩B).

\*Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a P (A U B) = P(A) + P(B).

\*Pour tous événements deux a deux **disjoints** ou **incompatibles** A1, A2…An on a

P (A1∪A2∪…∪An) = P(A1) + P(A2) +…+ P(An)

\*Pour tout événement A, P () = 1 - P(A) ( : Événement contraire de A)

**II) Equiprobabilité**

**1) Définition**

Il y a équiprobabilité (ou probabilité uniforme) si et seulement tous les événements ont la même probabilité.

la probabilité d'un événement élémentaire {*a*};

**2) Probabilité d'un événement A**
Pour tout événement A (relativement bien sur à l’univers Ω, la probabilité de A est :

**Remarque**

Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de [dénombrements](http://homeomath.imingo.net/denombre.htm) (voir cour 3ème)
**Exemple** :

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement :
A : " le numéro de la face supérieure est multiple de 2 "
A = {2 ;4  ; 6}
card A = 3
card Ω= 6

P(A)=3/6=1/2

et, pour tout événement A,

**III) Probabilité conditionnelle**

**1) Définition**

Soient p une [probabilité](http://homeomath.imingo.net/proba.htm) sur Ω et A et B deux événements tels que p(A) 0,

l'application qui à tout événement B associe le nombre réel

est une probabilité surΩ. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A on la note p(B/A)
**2)probabilités composées**

On en déduit la formule dite des probabilités composées :p (A B) = p(A) p (B/A).

**3) Événements indépendants**

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si la réalisation de A n'apporte aucune information sur la réalisation de B et on a p (AB) = p(A) p(B)

**Remarque**

 Ne pas confondre indépendant et incompatible

**Propriété**

 Deux événements A et B  sont indépendants si et seulement si on a : p (B/A) = p(B) ou

p (A/B)=p(A)

**4) Arbre de probabilité et formule des probabilités totales** :c'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

**Remarque**

Arbre probabiliste [Arbre à dénombrer](http://homeomath.imingo.net/arbre.htm)

**Exemple**

Soit p une [probabilité](http://homeomath.imingo.net/proba.htm) p sur un universΩ et A, Be t C trois évènements incompatibles et leur réunion est Ω

Soit un événement M compléter l'arbre probabiliste suivant :



p(A)

p(M∕A)

 ….

 ….

…..

P(M∩A)

 ….

p(M∕C)

 ….

 ……….….

 ….

 ….

p(M∕B)

p(B)

p(C)

La formule qui permet de calculer p(M) s'appelle formule des probabilités totales :

p(M)=p(M∩A) +p(M∩B) p(M∩C)

p(M)= p(M∕A) ×p(A) +p(M∕B) ×p(B) + p(M∕C) ×p(C)

**5) Définition**

Soit E un ensemble finie on dit que les parties M1 ,M2,.. et Mn forment une partition de E

Si et M1∪M2∪…∪Mn=E

**6) Formule des probabilités totales**

Soit (E, 𝒫(E) ;p) un espace probabilisé et A un événement

Alors pour toute partition M1 ,M2,.. et Mn des éléments non vide de E on a :

**7) Formule de bayes**

Soit E un ensemble finie et M1 ,M2,.. et Mn forment une partition de E

A un événement de probabilité non nulle