Mathématiques aux élèves Site web : http://www.matheleve.com/ Email :contact @matheleve.com	Probabilités sur un ensemble fini	
	Cours	4 ème Informatique

I) Probabilité sur un ensemble fini

1) Vocabulaire des événements

Dans une expérience aléatoire, l'univers Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles.

*Un événement est une partie de l'univers.

*Un événement élémentaire est un événement possédant un seul élément.

*Deux événements A, B, sont disjoints ou incompatibles si et seulement si $A \cap B = 0$.

*L'événement contraire d'un événement A est l'événement $\overline{A}$ constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

2) Calcul des probabilités

*La probabilité d'un événement d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

*La probabilité de Ω est 1 $(P(\Omega) = 1)$

*La probabilité de $\emptyset$ est 0 $(P(\emptyset) = 0)$

*Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Propriétés

*Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$

*Pour tous événements A et Bon a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

*Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

*Pour tous événements deux a deux **disjoints** ou **incompatibles** $A_1, A_2 \ldots A_n$ on a

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

*Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ($\overline{A}$: Événement contraire de A)

II) Equiprobabilité

1) Définition

Il y a équiprobabilité (ou probabilité uniforme) si et seulement tous les événements ont la même probabilité.

la probabilité d'un événement élémentaire $\{a\}$; $p(a) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$

2) Probabilité d'un événement A

Pour tout événement A (relativement bien sur à l'univers Ω, la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Remarque

Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de dénombrements (voir cour 3ème)

Exemple :

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement :

A : " le numéro de la face supérieure est multiple de 2 "

A = {2 ;4 ; 6}

card A = 3

card Ω= 6

P(A)=3/6=1/2

et, pour tout événement A,

$$\mathrm{p(A)} = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

III) Probabilité conditionnelle

1) Définition

Soients p une probabilité sur Ω et A et B deux événements tels que p(A) $\neq 0$,

l'application qui à tout événement B associe le nombre réel $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

est une probabilité surΩ. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A on la note p(B/A)

2)probabilités composées

On en déduit la formule dite des probabilités composées : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$.

3) Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si la réalisation de A n'apporte aucune information sur la réalisation de B et on a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Remarque

Ne pas confondre indépendant et incompatible

Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si on a : $p(B/A) = p(B)$ ou $p(A/B)=p(A)$

4) Arbre de probabilité et formule des probabilités totales :

c'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

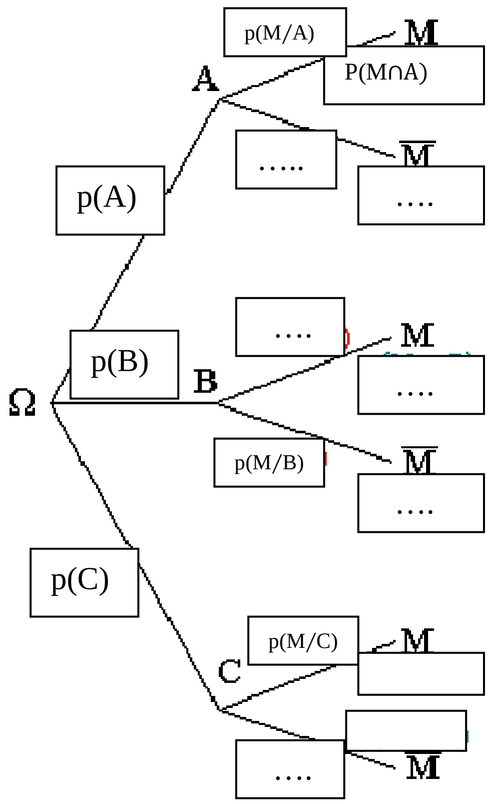
Remarque

Arbre probabiliste ≠ Arbre à dénombrer

Exemple

Soit p une probabilité p sur un univers Ω et A, Be t C trois évènements incompatibles et leur réunion est Ω

Soit un événement M compléter l'arbre probabiliste suivant :



La formule qui permet de calculer p(M) s'appelle formule des probabilités totales :

$$p(M)=p(M\cap A) +p(M\cap B)\ p(M\cap C)$$

$$p(M)= p(M/A) \times p(A) +p(M/B) \times p(B) + p(M/C) \times p(C)$$

5) Définition

Soit E un ensemble finie on dit que les parties M_1 ,M_2,.. et M_n forment une partition de E

Si $M_i \neq \emptyset$, $(i \in \{1,2,..n\})$ et $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = E$

6) Formule des probabilités totales

Soit $(E, \mathcal{P}(E) ;p)$ un espace probabilisé et A un événement

Alors pour toute partition M_1 ,M_2,.. et M_n des éléments non vide de E on a :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap M_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A / M_i)\, p(M_i)$$

7) Formule de bayes

Soit E un ensemble finie et M_1 ,M_2,.. et M_n forment une partition de E

A un événement de probabilité non nulle

$$p(M_i/A) = \frac{p(A/M_i).\, p(M_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A/M_j).\, p(M_j)}$$