Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux sans justification.

1) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2}{|x-1|}=+\infty$.

2) La fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x} & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x>1\end{cases}$ est continue en 1.

3) L'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ est la matrice $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

4) La matrice $M=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 2 (6 points)

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et pantalons.

Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75 m de tissu, 4 boutons et une fermeture ; la confection d'une robe nécessite 1,50 m de tissu, 6 boutons et une fermeture ; pour confectionner un pantalon, on utilise 1,25 m de tissu, 2 boutons et une fermeture.

On appelle *x*, *y* et *z* les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et *a*, *b* et *c* les quantités de tissus (en mètres), de boutons et de fermetures utilisés pour leur fabrication.

On appelle $M=\begin{pmatrix}0{,}75 & 1{,}5 & 1{,}25\\ 4 & 6 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

1) a) Vérifier que $B = M\times A$.

   b) Déterminer *a*, *b* et *c* pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

2) On considère la matrice $M'=\begin{pmatrix}-1{,}6 & 0{,}1 & 1{,}8\\ 0{,}8 & 0{,}2 & -1{,}4\\ 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}6\end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que la matrice *M* est inversible.

   b) Calculer $M\times M'$. Conclure.

   c) Ecrire la matrice *A* en fonction de *B* et de *M'*.

   d) En déduire *x*, *y* et *z* quand on a utilisé 735 mètres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.

Exercice 3(6 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right] \\ \dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x} & \text{si } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=1$.

   b) En déduire que g est continue en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3) a) Montrer que g est strictement croissante sur $\left]-\infty,0\right]$.

   b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-1,0]$.

   c) Vérifier que $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$

   d) Donner le signe de $g(x)$ sur $\left]-\infty,0\right]$.

Exercice 4(4 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[-1,+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ dont la courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.

1) Déterminer l'intervalle J image de $\left[-1,+\infty\right[$ par f.
2) Justifier graphiquement que f réalise une bijection de $\left[-1,+\infty\right[$ vers l'intervalle J.
3) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f et la courbe Γ de f^{-1} réciproque de f.
4) Montrer que pour tout $x\in J$; $f^{-1}(x)=x^2+2x$.