Lycée Bembla – Monastir 4ème Eco.Gestion	DEVOIR DE CONTROLE N°2	21/02/2007 CHORTANI A - 2 heures-

Exercice : (8 points)

Soit la suite (U_n) $n \in$ IN définit par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{2U_n} \end{cases}$$

1) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_n \geq 1$

b- Montrer que (U_n) est une suite décroissante

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente

2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par

$$V_n = \frac{2U_n - 2}{2U_n - 1}$$

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b- Calculer V_0

c- Exprimer V_n en fonction de n. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

d- Calculer $\lim\limits_{+\infty} U_n$

Problème : (12 points)

I- Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$g(x) = x + (x - 2)\text{Ln}x$.

1) a- Montrer que $g'(x) = 2\frac{x-1}{x} + \text{Ln}x$

b- En déduire que :

si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$ et

si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$

2) a- Etudier les variations de g.

b- En déduire que, pour tout réel x strictement positif, on a : $g(x) \geq 1$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x) = 1 + x\,\text{Ln}x - (\text{Ln}x)^2$.

1) a- Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et étudier les variations de f.

b- En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm)

a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par :

$h(x) = x - 1 - \text{Ln}x$.

En déduire le signe de $h(x)$

c- Montrer que $f(x) - x = (\text{Ln}x - 1)\, h(x)$ et en déduire la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T).

3) a- Tracer la courbe (C).

b- Tracer, dans le même repère, la courbe (C') représentative de la fonction f^{-1}.