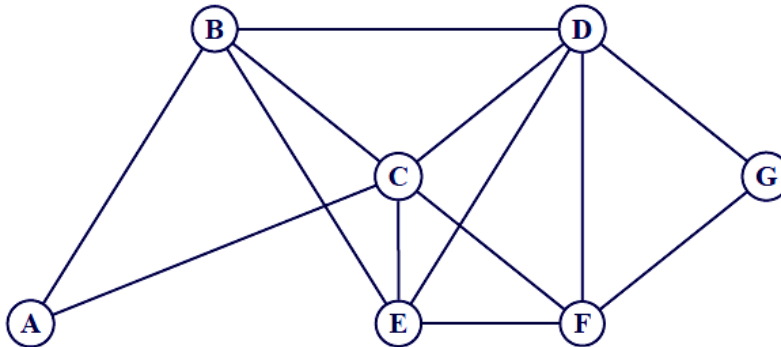




Exercice 1: (9 points)

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



1. a) Donner le degré de chacun des sommets :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés							

b) Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie. Montrer qu'un tel parcours est possible.

.....

.....

.....

c) Donner un exemple d'un tel parcours:

2. a) Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets C, D, E et F ?

.....

.....

b) En déduire un encadrement du nombre chromatique $\gamma(\Gamma)$.

c) Proposer un coloriage du graphe (compléter le tableau ci-dessous)

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Couleur attribuée							

d) Déterminer le nombre chromatique $\gamma(\Gamma) = \dots\dots\dots$



3. a) Compléter la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

b) On donne la matrice $M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

.....

.....

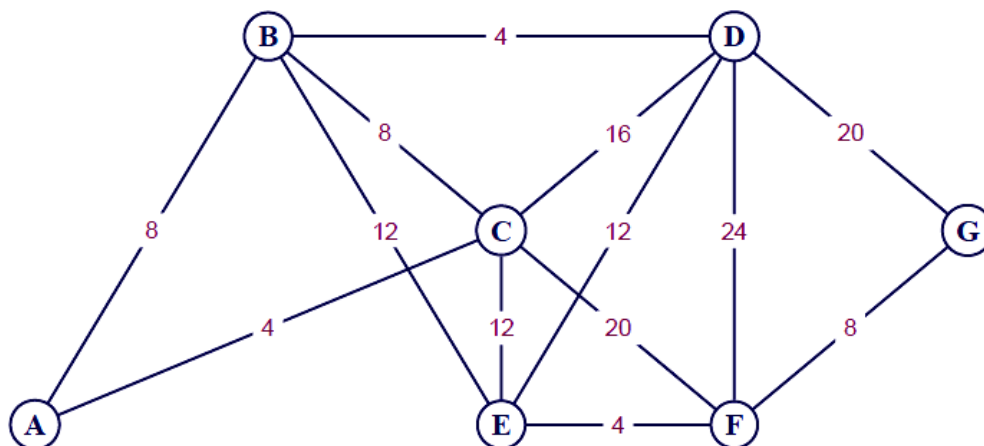
.....

.....

.....

.....

4. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G .

a) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

Compléter le tableau suivant:



A	B	C	D	E	F	G	Sommet sélectionné	poids

b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet?

Exercice 2: (6 points)

On considère le graphe G de sommet A, B, C, D et E et dont la matrice associée est $M =$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. G est -il un graphe orienté? Justifier.

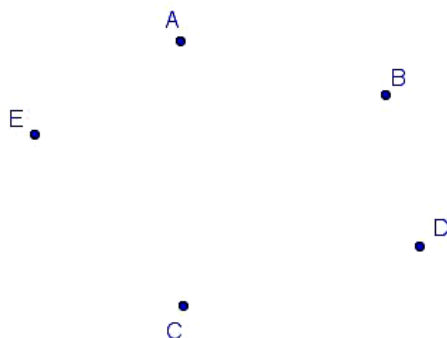
2. a) Utiliser le graphe G pour compléter le tableau au-dessous :

	A	B	C	D	E
d^+					
d^-					
$d^+ - d^-$					

b) G admet-il un cycle orienté eulérien ?

c) G admet-il une chaîne orientée eulérienne ?

3. a) Représenter le graphe G:



b) On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ Combien existe-il de chemins de longueur 3 reliant B à C ? Citer ces chemins.

.....

.....

.....

✓ Déterminer la distance du sommet D au sommet E , en justifiant votre réponse.

.....

.....

c) On donne :

$$M + I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (M + I_5)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (M + I_5)^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le diamètre de graphe G . Justifier votre réponse.

.....

.....

Exercice 3: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) **a-** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat .

b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat

2) **a-** Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

b-Dresser le tableau de variation de f .

3) **a-**Calculer $f''(x)$ et montrer que le point I d'abscisse 2 est un point d'inflexion de ζ_f .

b-Ecrire une équation de la tangente Δ à ζ_f au point I .

4) Tracer ζ_f et Δ .