

EXERCICE 1(6pts)

1. Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{1}{2^n}$

(a) Calculer u_0 et u_1

(b) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} v_0 & = 2 \\ v_{n+1} & = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a) Calculer v_1

(b) Montrer que $v_n > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

(b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

(a) Montrer par récurrence que $v_n = 1 + u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

EXERCICE 2 (7pts)

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2 \ln x$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(b) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet le nombre 1 comme unique solution sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$.

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(b) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

(a) Dresser le tableau de variation de f .

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter ce résultat.

3. Soit C_f et Γ les courbes respectivement des fonctions f et \ln dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(a) Etudier la position relative de C_f et Γ .

(b) Tracer C_f et Γ .

EXERCICE 3 (7pts)

Soit (G) le graphe de sommets A, B, C et D dans cette ordre défini par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Ce graphe est -il orienté?
(b) Ce graphe est -il connexe? est-il complet? justifier la réponse.

- (a) Déterminer le degré de chacun de ces sommets.
(b) En déduire le nombre d'arêtes de (G) .

2. Représenter le graphe (G) associé à la matrice M .

3. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

- (a) Déterminer le nombre de chaînes orientées de longueur 3 reliant D à A .
(b) Citer ces chemins.