

## Devoir de contrôle N°2

<b>2018/2019</b>	<b>MATHEMATIQUES</b>	<b>Bac science</b>
<b>Mr BechirFehri</b>		<b>Durée : 2H</b>

### EXERCICE N°1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :  $A(2,0,0)$ ,  $B(0,0,2)$  et  $(0,2,0)$

1/a- Montrer que le (ABC) est un plan dont une équation cartésienne est :  $x+y+z-2=0$   
b-calculer le volume du tétraèdre OABC.

2/ Montrer que le plan Q passant par le milieu du segment [AC] et perpendiculaire à la droite (BC) a pour équation cartésienne :  $y-z-1=0$

3/a- Montrer que Q est perpendiculaire à (ABC).

b- caractériser la droite  $\Delta$  d'intersection des plan Q et (ABC)

4/ Soit  $\delta = \{M(x, y, z) \in \text{Espace} \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0\}$

a- Montrer que  $\delta$  est la sphère de diamètre [BC].

b- Montrer que  $\delta$  et Q sont sécants suivant un cercle  $\varphi$  que l'on caractérisera.

5/ soit  $\delta'$  la sphère de centre O et contenant le cercle  $\varphi$ . Calculer le rayon de la sphère  $\delta'$ .

### EXERCICE N°2 :

Soit f la fonction définie sur  $[0,1[$  par  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ . c'est sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,

1/a- Dresser le tableau de variation de f.

b-Déterminer la position de C par rapport à  $\Delta : y=x$

c- Tracer  $\Delta$  et C

2/ Soit F la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  par  $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)dt$ .

a- Montrer que F est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ , dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et calculer  $F'(x)$

b- En déduire que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$  on a  $F(x) = \frac{x}{2}$

c- Trouver alors A de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations :

d-  $y=x$ ;  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

3/ soit  $\Delta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ . On pose  $I(\lambda) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin \lambda}} \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3} dt$ .

a- A l'aide d'une intégration par partie calculer  $I(\lambda)$ .

b- Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} I(\lambda)$ .



### EXERCICE N°3 :

Soit  $(I_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$ .

1/ Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente.

2/ Calculer  $I_0$ ,  $I_0 + I_1$  et en déduire  $I_1$ .

3/a- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

b- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$

c- En déduire la limite de  $I_n$  en  $+\infty$ .

4/ Soit tout pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

a- Montrer par récurrence que tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $2(-1)^{n+1} I_n = S_n - \ln 2$

b- En déduire la limite de  $S_n$  en  $+\infty$ .

### EXERCICE N°4 :

I/ soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, 4[$  par  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$  on désigne par  $C_f$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, 4[$  et que  $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$

2/ Dresser le tableau de variation de  $f$

3/ Ecrire l'équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 2

4/ Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, 4[$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.

5/ Tracer  $C_f$ ,  $T$  et  $C_f^{-1}$  dans la même repère.

6/  $\Delta: y = x$  coupe  $C_f$  en un point d'abscisse  $\alpha$ ,  $3 < \alpha < 4$

Montrer que l'aire en  $\Delta$  de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$ ,  $T$  et  $C_f^{-1}$  et les droites d'équation  $x=0$  et  $y=0$  est égale à  $\frac{\alpha^3 - 2\alpha - 4}{\alpha}$

II/ On donne  $g(x) = 2 - 2\cos x$   $x \in [0, \pi]$

1/ Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera on note par  $G$  sa fonction réciproque.

2/ a- Montrer que  $G$  est dérivable sur  $]0, 4[$  tel que  $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

b- Montrer que  $I(2, \frac{\pi}{2})$  est un centre de symétrie de sa courbe de  $G$

BONNE TRAVAIL

