

Devoir de contrôle N°2

2018/2019	MATHEMATIQUES	Bac science
Mr BechirFehri		Durée : 2H

EXERCICE N°1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(2,0,0)$, $B(0,0,2)$ et $(0,2,0)$

1/a- Montrer que le (ABC) est un plan dont une équation cartésienne est : $x+y+z-2=0$
b-calculer le volume du tétraèdre OABC.

2/ Montrer que le plan Q passant par le milieu du segment [AC] et perpendiculaire à la droite (BC) a pour équation cartésienne : $y-z-1=0$

3/a- Montrer que Q est perpendiculaire à (ABC).

b- caractériser la droite Δ d'intersection des plan Q et (ABC)

4/ Soit $\delta = \{M(x, y, z) \in \text{Espace} \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0\}$

a- Montrer que δ est la sphère de diamètre [BC].

b- Montrer que δ et Q sont sécants suivant un cercle φ que l'on caractérisera.

5/ soit δ' la sphère de centre O et contenant le cercle φ . Calculer le rayon de la sphère δ' .

EXERCICE N°2 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$. c'est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

1/a- Dresser le tableau de variation de f.

b-Déterminer la position de C par rapport à $\Delta : y=x$

c- Tracer Δ et C

2/ Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)dt$.

a- Montrer que F est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$

b- En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $F(x) = \frac{x}{2}$

c- Trouver alors A de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations :

d- $y=x$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3/ soit $\Delta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$. On pose $I(\lambda) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin \lambda}} \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3} dt$.

a- A l'aide d'une intégration par partie calculer $I(\lambda)$.

b- Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} I(\lambda)$.



EXERCICE N°3 :

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

1/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2/ Calculer I_0 , $I_0 + I_1$ et en déduire I_1 .

3/a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$

c- En déduire la limite de I_n en $+\infty$.

4/ Soit tout pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a- Montrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2(-1)^{n+1} I_n = S_n - \ln 2$

b- En déduire la limite de S_n en $+\infty$.

EXERCICE N°4 :

I/ soit f la fonction définie sur $]0, 4[$ par $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1/ Montrer que f est dérivable sur $]0, 4[$ et que $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$

2/ Dresser le tableau de variation de f

3/ Ecrire l'équation de la tangente T au point d'abscisse 2

4/ Montrer que f réalise une bijection de $]0, 4[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5/ Tracer C_f , T et C_f^{-1} dans la même repère.

6/ $\Delta: y = x$ coupe C_f en un point d'abscisse α , $3 < \alpha < 4$

Montrer que l'aire en Δ de la partie du plan limitée par la courbe C_f , T et C_f^{-1} et les droites d'équation $x=0$ et $y=0$ est égale à $\frac{\alpha^3 - 2\alpha - 4}{\alpha}$

II/ On donne $g(x) = 2 - 2\cos x$ $x \in [0, \pi]$

1/ Montrer que g réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle K que l'on précisera on note par G sa fonction réciproque.

2/ a- Montrer que G est dérivable sur $]0, 4[$ tel que $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

b- Montrer que $I(2, \frac{\pi}{2})$ est un centre de symétrie de sa courbe de G

BONNE TRAVAIL

