

# Combinaisons. Binôme de NEWTON

## Factorielles

- On pose  $0! = 1$  et pour tout entier naturel non nul  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $(n+1)! = (n+1) \times n!$ .

### Les premières factorielles

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \quad 7! = 5040.$$

## Combinaisons

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Pour tout entier naturel  $p$ , une **combinaison** à  $p$  éléments de  $E$  est une partie à  $p$  éléments de  $E$ .

On note  $\binom{n}{p}$  le nombre de combinaisons à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments. On a donc  $\binom{n}{0} = 1$  et si  $p > n$ ,  $\binom{n}{p} = 0$ .

Ensuite, pour  $n$  et  $p$  entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n$ , le nombre de combinaisons à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  élément est

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!}$$

### Propriétés des combinaisons

- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .
- Pour  $n$  et  $p$  entiers naturels tels que  $n \geq 1$  et  $0 \leq p \leq n$ ,  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .
- Pour  $n$  et  $p$  entiers naturels tels que  $0 \leq p \leq n-1$ ,  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ .

### Triangle de PASCAL

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

## Formule du binôme de NEWTON

Pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$  et tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Ainsi,

- $(a+b)^1 = a+b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

<http://www.matheleve.com/>