Fonctions continues

Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un réel élément de I.

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est continue sur I si et seulement si f est continue en chaque réel a de I.

Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe « se trace sans lever le crayon ».

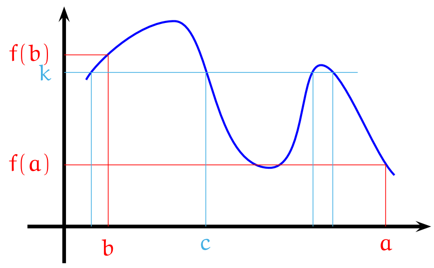
Exemples de fonctions continues

Presque toutes les fonctions de terminale sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition :

- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition ;
- les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal sont continues sur $]0, +\infty[$;
- les fonctions racines n-èmes sont continues sur $[0, +\infty[$;
- les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$;
- toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.

La fonction partie entière fournit un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ et discontinue en certains réels (et donc non continue sur $\mathbb{R}$).

Théorème des valeurs intermédiaires



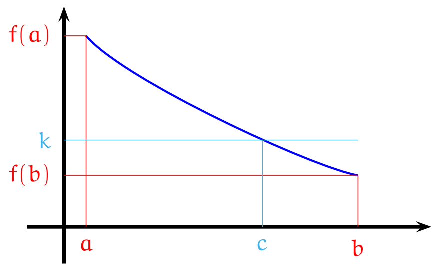
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel c compris entre a et b

tel que $f(c) = k$.

Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle



Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a, b]$.

Ce théorème se généralise à des intervalles du type $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, ... en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en la borne manquante.

Conséquence.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[a, b]$.