Rappels

Continuité et limite en réel

Activités pages 6 et 7

Opérations sur les limites :

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 Par valeurs supérieures	0 Par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

Règles opératoires

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Activités 7 page 8.

Exercice :

Calculer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+x-6}{-3x^2-5x+2} \; ; \; \lim_{x\to 1} \frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1} \; ; \; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x} \; ; \; \lim_{|x|\to +\infty} \sqrt{4x^2-x+1}-2x .$$

Branches infinies

Asymptote horizontale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞ [où a est un réel et L un réel donné .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ alors la droite d'équation y = L est **asymptote horizontale** à la courbe Cf en + ∞ .

Asymptote verticale :

Soit f une fonction .

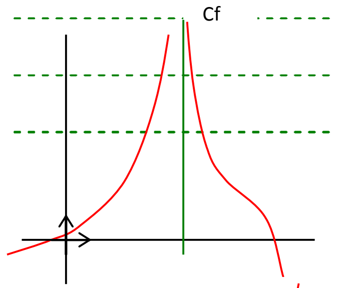
- Si « ***f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a*** » , alors on dit que f a pour limite + ∞ en a .

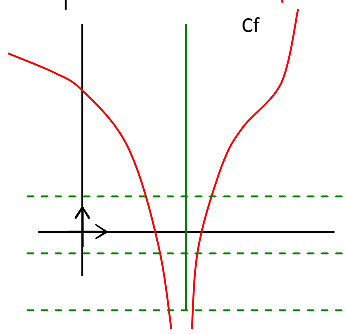
On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation x = a est **asymptote verticale** à la courbe Cf .





Asymptote oblique :

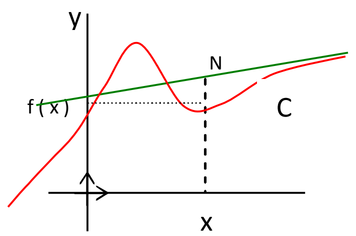
Soit a (a ≠ 0) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.

Dire que la droite d'équation y = a x + b est asymptote oblique à C en + ∞

(respectivement en – ∞) revient à dire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$$

$$\left(\text{respectivement } \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0 \right)$$



Ex : Montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+2x-2}{2x}$ admet en ± ∞ une asymptote Δ..

Etudier les positions de C_f et Δ.

Branches paraboliques :

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm \infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction (Oy)**.

(type x^2).

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm \infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction (Ox)**.

(type $\sqrt{x}$).

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm \infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a:$\neq 0$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$.

* Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation $y = a x + b$ est **asymptote oblique** à C en $\pm \infty$.
* Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm \infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** **$y = ax$** en $\pm\infty$.

Activité 3 page 10 ; Exercices 7, 10, 11 et 12 pages 24 et 25.

Continuité et limite d'une fonction composée

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur ensemble J tel que $f(I) \subset J$.

La fonction notée $g \circ f$, définie sur I par $g \circ f(x) = g[f(x)]$, est appelée fonction composée de f et g.

Exemple :

$f(x) = 3x + 7$ et $g(y) = y^2$.

$g \circ f(x) =$ ....

$f \circ g(x) =$ ....

Remarque :..

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence :

Si $\begin{cases} \boldsymbol{f} \text{ est continue sur I} \\ \text{g est continue sur J} \\ \boldsymbol{f(I) \subset J} \end{cases}$ alors $\boldsymbol{g \circ f}$ est continue sur I.

Activité page 12.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Activités 1 page 12, 2 et 3 page 13.

Exercice n°1 :

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{f(x)+3}$.

Exercice n°2 :

1. Soit $\boldsymbol{f(x) = E\left(\frac{3x^2-3}{2x^2+1}\right)}$

   Déterminer $\lim\limits_{+\infty} \boldsymbol{f}$, $\lim\limits_{1} \boldsymbol{f}$ et $\lim\limits_{0} \boldsymbol{f}$.

2. Soit $\boldsymbol{g(x) = \frac{3\tan^2 x - 2\tan x + 5}{1 + \tan^2 x}}$.

   Déterminer $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \boldsymbol{g}$.

Limites et ordre

Théorème :

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I.

Soit deux réels ℓ et ℓ'.

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_a h = \lim\limits_a g = \ell$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_a g = +\infty$, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_a g = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

Activités 3 et 4 page 15.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité 1 page 15.

Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue

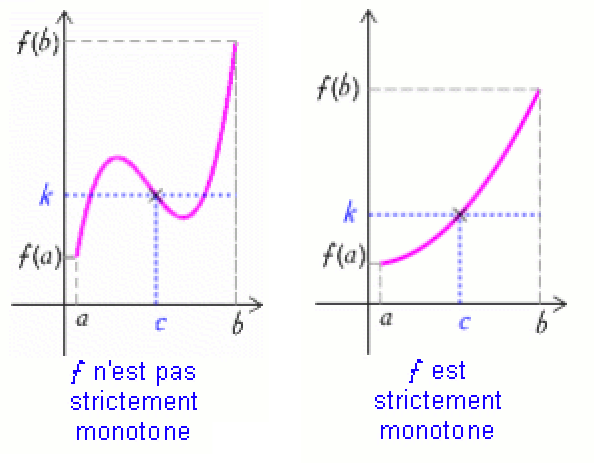
sur un intervalle I.

Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel c compris entre a et b

tel que $f(c) = k$



On peut aussi l'exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Si de plus f est strictement monotone sur I, alors c est unique.

Activité 4 page 16.

Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Exercice :

Etudier le signe de $f(x)=\sqrt{x^2-4x}+3x$ sur son domaine de définition.

Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :

Activité 1 page 18.

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$

Où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

  Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.

  Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini) .

  Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b .

  Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples :

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,f(a)\right]$
$I=[a,+\infty[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)\right]$
$I=]a,b[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$

Exercice :

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f: x \mapsto x^2-2x$, $I=]-\infty,0]$.
2. $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $I=[1,+\infty[$.
3. $f: x \mapsto \sin x$, $I=\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Activité 2 page 20.