Chapitre

2

Dérivabilité

Sommaire

I. Dérivabilité

I.1 Dérivabilité en un point - nombre dérivée

Définition I.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$.

On dit que f est dérivable en x_0 , si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

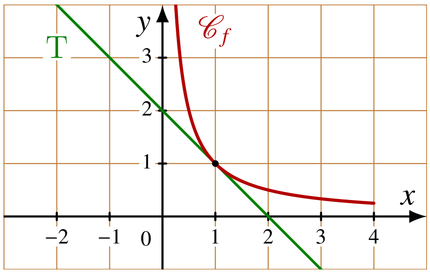
Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé :

f est dérivable en x_0 si seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une tangente T d'équation cartésienne :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$.



I.2 Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche

Définition I.2

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0\,;\,x_0 + h[\quad;\quad h > 0$

  On dit que f est dérivable à droite en x_0 , si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

  Cette limite est appelée le nombre dérivé à droite de f en x_0, on le note $f'_d(x_0)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - h\,;\,x_0]\quad;\quad h > 0$

  On dit que f est dérivable à gauche en x_0 , si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

  Cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche de f en x_0, on le note $f'_g(x_0)$.

Interprétation graphique :

- Si f est dérivable à droite en x_0 , alors sa courbe représentative admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une demi-tangente T_d d'équation cartésienne $\boxed{y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\quad;\quad x \geqslant x_0}$

  et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(x_0) \end{pmatrix}$.

- Si f est dérivable à gauche en x_0 , alors sa courbe représentative admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une demi-tangente T_g d'équation cartésienne $\boxed{y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\quad;\quad x \leqslant x_0}$

  et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(x_0) \end{pmatrix}$.

Théorème I.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$.
f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)|x-1|$.

1) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1. Donner le nombre dérivé de f en 1 .

2) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

3) Dans un repère, tracer la courbe représentative C_f de f .

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 1|$.

1) Donner, suivant la valeur de x, l'expression de $f(x)$.

2) Étudier la dérivabilité de f en 1 .

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction non dérivable :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On note par C_f la courbe représentative de f .

- Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 mais $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors C_f admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ deux demi-tangentes .
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, alors C_f admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigées vers le haut.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, alors C_f admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigées vers le bas.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, alors C_f admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigées vers le bas.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, alors C_f admet au point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigées vers le haut.

I.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition I.3

- Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction qui, à tout réel $x \in$ I associe le nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f. Elle est notée f'.

Dérivée des fonctions usuelles :

Fonction	$f(x)$	Dérivable sur	$f'(x)$
constante	c	$\mathbb{R}$	0
identité	x	$\mathbb{R}$	1
carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
monome	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
inverse	$\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
racine carré	$\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

I.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Soit un réel α et deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I.

- Les fonctions $u+v$, $\alpha.u$, uv et u^n ($n \in \mathbb{N}\,; n \geqslant 2$) sont dérivables sur I.
- Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I sauf là où v s'annule.

Fonction	$u+v$	$\alpha.u$	uv	u^n	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$u'+v'$	$\alpha.u'$	$u'v+uv'$	$nu'u^{n-1}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Application ☞ Manuel scolaire – Activité 3; page 42

I.5 Dérivée d'une fonction composée

Activité ☞ Manuel scolaire – Activité 1 ; page 48

Théorème I.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit g une fonction définie sur $f(\mathrm{I})$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en $x0$ et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0).f'(x_0)$$

Application ☞ Manuel scolaire – Activité 2 ; page 48

Corollaire I.1

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de et g est une fonction dérivable sur $f(\mathrm{I})$ alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Corollaire I.2

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si de plus pour tout x de I, $f(x) > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Application ☞ Manuel scolaire – Activité 3 ; page 49

I.6 Dérivée et sens de variation

Activité ☞ Manuel scolaire – Activité 1 ; page 45

Théorème I.3

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que : $f'(x) = \dfrac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2}$.

2) Résoudre l'équation $t^2 + 4t - 1 = 0$. En déduire le signe de $f'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

II. Extremums d'une fonction

Définition II.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

- La fonction f admet un **maximum local** en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- La fonction f admet un **minimum local** en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- Lorsque f admet un maximum local ou un minimum local en x_0 , on dit que f admet un **extremum local** en x_0.

Théorème II.1

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I. x_0 un point de I.

- Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 alors la fonction f admet un extremum local en x_0.

Application

Soit la fonction f définie sur $I = [-1\,; 5]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
Étudier les variations de f et montrer que f a deux extremums locaux .

! Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(x_0) = 0$, x_0 n'est pas nécessairement un extremum local.
contre-exemple : $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

III. Dérivée seconde et point d'inflexion

Définition III.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
On note par C_f la courbe représentative de f.

- Dérivée seconde :
  Si la fonction f' est dérivable sur I alors f est dite deux fois dérivable sur I et la fonction dérivée de f' se note f'' et s'appelle fonction dérivée seconde de f.

- Point d'inflexion :
  Un point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ est un point d'inflexion de C_f si et seulement si C_f traverse sa tangente en M_0 .

Théorème III.1

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et C_f sa courbe représentative. Soit f'' la fonction dérivée seconde de f.
Si la fonction f'' s'annule et change de signe en x_0 alors le point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ est un point d'inflexion de C_f.

Application ☞ Manuel scolaire – Activité 2; page 44

Théorème III.2

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et C_f sa courbe représentative. Soit f' la fonction dérivée de f.
Si la fonction f' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $\mathrm{M}(x_0\,;\,f(x_0))$ est un point d'inflexion de C_f.