Résumé :*Identité de Bézout*

Niveau :*Bac mathématiques*

Réalisé par : ***Prof. Benjeddou Saber*** -saberbjd2003@yahoo.fr

## Théorème et définition :*"PGCD"*

Si $a$ et $b$ sont deux entiers non nuls, alors il existe un unique entier naturel $d$ qui vérifieles deux conditions suivantes :

- $d$ divise $a$ et $d$divise$b$,
- Si un entier $k$ divise $a$ et $b$ alors il divise$d$.

L'entier $d$ défini plus haut est noté$a \wedge b$ et appelé **le plus grand commun diviseur** dea et b.

## Conséquences :

- Pour tous entiers $a$ et $b$ non nuls,$a \wedge b > 0$.
- Pour tous entiers $a$ et $b$ non nuls,$a \wedge b = |a| \wedge |b|$.

## Propriétés :

Soit $a$ et $b$ deux entiers non nuls.

1) Si $b$ divise $a$alors$a \wedge b = |b|$.
2) Si $b$ ne divise pas $a$ et si $r$ est le reste modulo $b$de$a$,alors$a \wedge b = b \wedge r$.
3) $a \wedge b = b \wedge a$.
4) Pour tout entier non nul$k$, $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$.
5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

## Définition :*"Entiers premiers entre eux"*

Deux entiers non nuls $a$ et $b$ sont dits premiers entre eux, si$a \wedge b = 1$.

## Théorème :

## Lemme de Gauss :

Soit$a$, $b$ et $c$ trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et $a$ divise $bc$ alors a divise $c$.

## Théorème :

## Théorème et définition :*"PPCM"*

Pour tous entiers $a$ et $b$ non nuls il existe un que entier $m$ strictement positif quivérifie les deux conditions suivantes.

Conséquences :

- Pour tous entiers $a$ et $b$ non nuls,$a \vee b = |a| \vee |b|$.
- Pour tous entiers $a$ et $b$ non nuls,$(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$.

Propriétés :

Soit $a$ et $b$ deux entiers non nuls.

1) Si $b$ divise $a$ alors $a \vee b = | \quad |$.
2) Pour tout entier non nul$k$, $ka \vee kb = |k|(a \vee b)$.
3) $a \vee b = b \vee a$.
4) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Théorème :

Théorème :*"Identité de Bézout"*

Deux entiers non nuls $a$ et $b$ sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deuxentiers $u$ et $v$ tels que$au + bv = 1$.

Corollaire :

Soit $a$ et $b$ deux entiers non nuls et$d = a \wedge b$. Alors il existe deux entiers $u$ et $v$ tels que$au + bv = d$.

Théorème :

Soit$a$, $b$ et $c$ trois entiers et$d = a \wedge b$.
L'équation $ax + by = c$ admet des solutionsdans$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si et seulement si, $d$ divise $c$.