Résumé : *Continuité et limites*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est continue en a, alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I.

Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et admettant une limite finie l en a.

Alors la fonction g définie sur I par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq a \\ l & si\ x = a \end{cases}$ est continue en a.

Limite d'une somme :

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Limite d'un produit :

f a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Limite d'un quotient :

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
g a pour limite	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

f a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
g a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'une valeur absolue et d'une racine carrée :

f a pour limite	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lvert f\rvert$ a pour limite	$\lvert l\rvert$	$+\infty$	$+\infty$
$\sqrt{\lvert f\rvert}$ a pour limite	$\sqrt{\lvert l\rvert}$	$+\infty$	$+\infty$

Théorème :

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Définition : *"Branches paraboliques"*

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

✓ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction celle de $(O,\vec{\jmath})$.

✓ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction celle de $(O,\vec{\imath})$.

✓ Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction celle de $(O,\vec{\jmath})$.

✓ Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction celle de $(O,\vec{\imath})$.

Définition : *"Asymptotes verticales ou parallèles à l'axe $(O,\vec{j})$"*

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. a est un réel.

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite $\Delta: x = a$ est une asymptote verticale (ou parallèle à l'axe $(O,\vec{j})$) à C_f.

Définition : *"Asymptotes horizontales ou parallèles à l'axe $(O,\vec{i})$"*

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. b est un réel.

- ✓ Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors la droite $\Delta: y = b$ est une asymptote horizontale (ou parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$) à C_f au voisinage de $-\infty$.
- ✓ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, alors la droite $\Delta: y = b$ est une asymptote horizontale (ou parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$) à C_f au voisinage de $+\infty$.

Définition : *"Asymptotes obliques"*

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a et b sont deux réels.

- ✓ La droite $\Delta: y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
- ✓ La droite $\Delta: y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

Remarques :

- ✓ Les valeurs de a et de b se calculent à l'aide des formules suivantes :

  $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$
- ✓ Pour étudier la position relative de l'asymptote oblique $\Delta: y = ax + b$ et la courbe C_f, on étudie le signe de l'expression $f(x) - (ax+b)$.

Définition : *"Direction asymptotique"*

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. a est un réel.

- ✓ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors la droite $\Delta: y = ax$ est une direction asymptotique à C_f au voisinage de $+\infty$.
- ✓ Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors la droite $\Delta: y = ax$ est une direction asymptotique à C_f au voisinage de -∞.

__Définition__ : *"Fonction composée"*

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J telles que $u(I) \subset J$.

La fonction composée de u par v, notée $v \circ u$ et on lit : "v rond u, est la fonction définie sur I par : $(v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big)$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

__Théorème__ :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0 et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(x_0)$.

Si u est continue en x_0 et v est continue en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est continue en x_0.

__Corollaire__ :

La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

__Théorème__ :

Soit I et J deux intervalles ouverts, $x_0 \in I$, $l \in J$ et l' un réel.

Soit u une fonction définie sur I, sauf peut-être en x_0 et v une fonction définie sur J, sauf peut-être en l.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} v(x) = l'$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (v \circ u)(x) = l'$.

__Théorème__ :

Soit u et v deux fonctions.

Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$.

__Théorème__ :

Soient f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel x_0 de I.

- Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} v(x)$.
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en x_0 ou à gauche en x_0.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel x_0 de I.

- Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en x_0 ou à gauche en x_0.

Théorème :

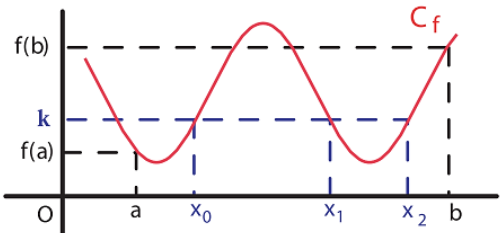
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



En particulier, si $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

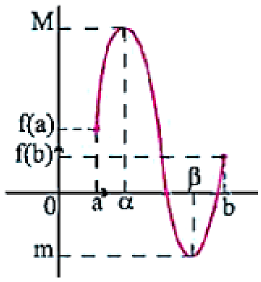
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Théorème :

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m, M]$.

Le réel m est le minimum de f sur $[a, b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a, b]$.



Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infini).

- Si f est croissante et majorée alors elle possède une limite finie en b.
- Si f est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$ en b.
- Si f est décroissante et minorée alors elle possède une limite finie en b.
- Si f est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$ en b.

Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

I	**Si f est strictement croissante sur I**	**Si f est strictement décroissante sur I**
$[a, b]$	$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$f([a, b[) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f([a, b[) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a, b]$	$f(]a, b]) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$f(]a, b]) = \left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a, b[$	$f(]a, b[) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f(]a, b[) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a, +\infty[$	$f([a, +\infty[) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$f([a, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a, +\infty[$	$f(]a, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$f(]a, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty, b]$	$f(]-\infty, b]) = \left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(b)\right]$	$f(]-\infty, b]) = \left[f(b), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty, b[$	$f(]-\infty, b[) = \left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f(]-\infty, b[) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty, +\infty[$	$f(]-\infty, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$f(]-\infty, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$