Résumé : *Suites réelles*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème :

Soit (u_n) une suite réelle et l finie ou infini.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.

Théorème :

Toute suite convergente est bornée.

Théorème :

Soit (u_n) une suite convergente vers un réel a.

- S'il existe un entier naturel N_0 tel que $0 \leq u_n$ pour tout $n \geq N_0$, alors $0 \leq a$.
- S'il existe un entier naturel N_0 tel que $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq N_0$, alors $a \leq 0$.

Conséquence :

Soit N_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \geq N_0$.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a, alors $m \leq a \leq M$.

Opérations sur les limites :

Limite d'une somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème :

Soit q un réel.

- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q\leq -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

Théorème :

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n\geq 0$, où q est un réel non nul.

- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q|<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q\leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q=1$, alors la suite (u_n) est constante.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I et soit $l\in I$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to l} f(x) = L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Théorème :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes respectivement vers deux réels a et b.

S'il existe un entier naturel N_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n\geq N_0$, alors $a\leq b$.

Théorème :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et soit a un réel.

On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \geq N_0$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

Corollaire :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq N_0$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Théorème :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème :

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a et $u_n \leq a$ pour tout $n \geq 0$.

Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b et $u_n \geq b$ pour tout $n \geq 0$.

Théorème :

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Théorème :

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en l, alors $l = f(l)$.

Définition : *"Suites adjacentes"*

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes :

- Pour tout $n \geq 0$: $u_n \leq v_n$.
- La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
- La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.