ISOMETRIES

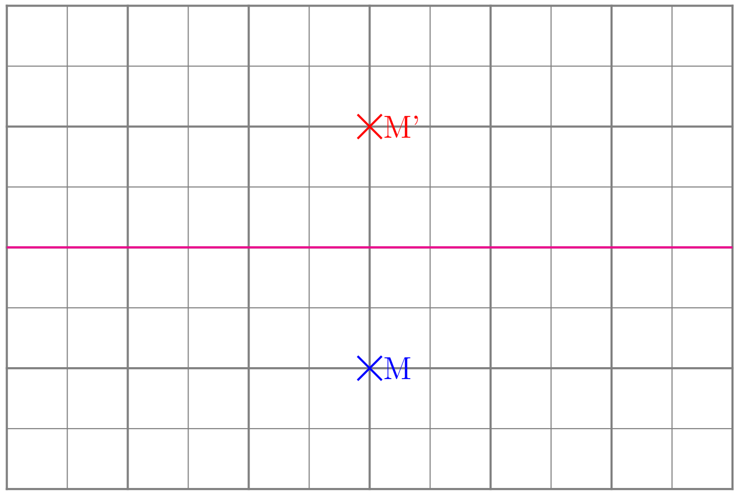
I / Rappels

1) Symétrie axiale

réflexion

M' est l'image de M par la symétrie d'axe D si D est la médiatrice de [MM'].

La symétrie d'axe D s'appelle aussi réflexion d'axe D et se note r_D.



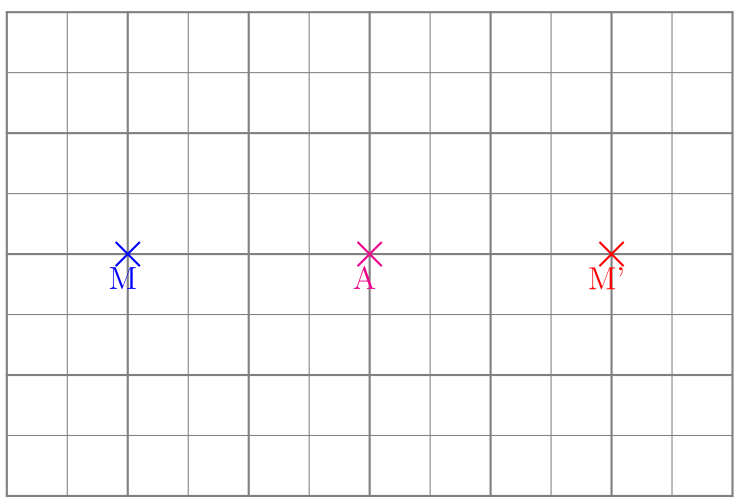
Une symétrie axiale conserve les alignements, les distances, les angles et les aires.

2) Symétrie centrale

symétrie

M' est l'image de M par la symétrie de centre A si A est le milieu de [MM'].

La symétrie de centre A se note s_A.

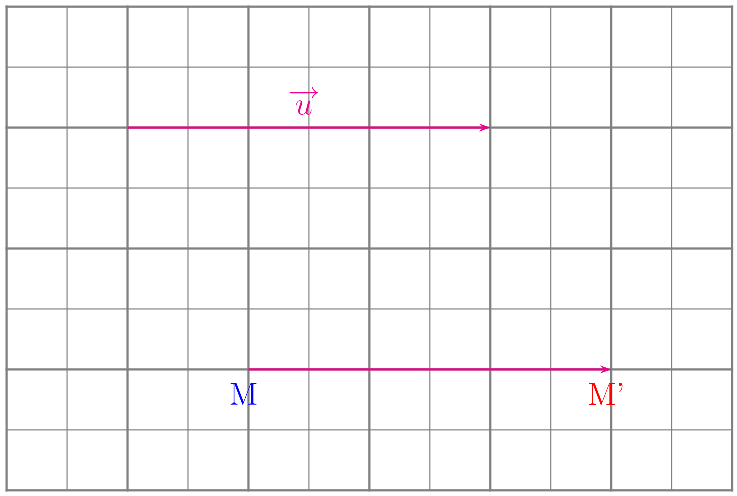


Une symétrie centrale conserve les alignements, les distances, les angles et les aires. En plus, l'image d'une droite est parallèle à celle-ci.

3) Translation

translation

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$;
On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $t_{\overrightarrow{u}}$.



Une translation conserve les alignements, les distances, les angles et les aires. En plus, l'image d'une droite est parallèle à celle-ci.

4) Rotation

rotation

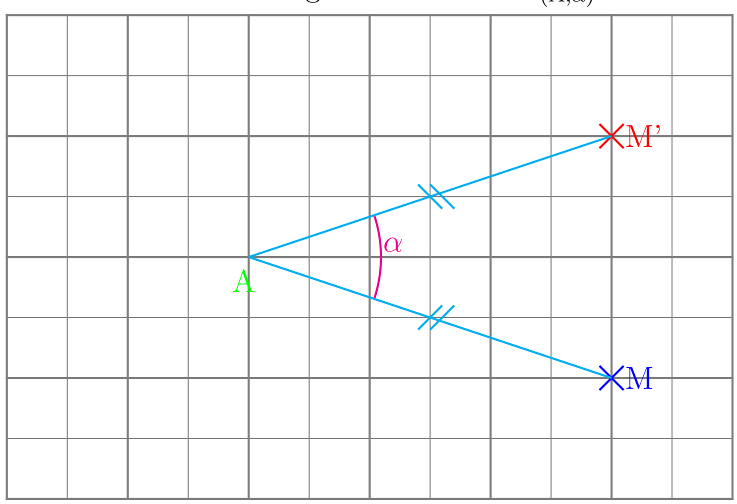
M' est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle α si :

a) $AM' = AM$

b) $\widehat{MAM'} = \alpha$

c) En plus, il faut préciser le sens de la rotation.

La rotation de centre A et d'angle α est notée $R_{(A,\alpha)}$.



Cas particulier : La rotation de centre A et d'angle 180° est la symétrie de centre A :
$R_{(A\ ,180°)} = s_A$.
Une rotation conserve les alignements, les distances, les angles et les aires.

5) Isométries

Une transformation qui conserve les distances s'appelle une isométrie.

Toute isométrie conserve les alignements, les angles et les aires :
Les réflexions, translations et rotations (en particulier les symétries centrales) sont des isométries.
homothétie

II / Triangles isométriques

1) Définition

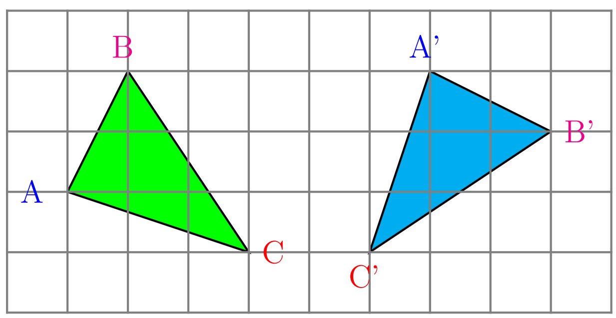
Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits isométriques s'ils ont les mêmes longueurs, soit :

a) AB=A'B'

b) BC=B'C'

c) AC=A'C'

Exemple :



En prenant le carreau comme unité de longueur, le théorème de Pythagore donne :

a) AB=$\sqrt{5}$=A'B'

b) BC=$\sqrt{13}$=B'C'

c) AC=$\sqrt{10}$=A'C'

Les deux triangles sont donc isométriques.

2) Propriétés

Si deux triangles sont isométriques :

a) Ils ont les mêmes angles :
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

b) Ils ont la même aire,

c) et leurs cercles circonscrits ont même rayon.

3) "Cas d'égalité"

a) Si deux triangles ABC et A'B'C' ont les mêmes angles :
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$
ils ne sont pas nécessairement isométriques : Par exemple, tous les triangles équilatéraux ont les mêmes angles et ne sont pas forcément de la même taille.

b) Si deux triangles ABC et A'B'C' vérifient :

AB=A'B'

$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

alors ils sont isométriques.
Remarque : Si
$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
et
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
alors $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$
puisque la somme des angles d'un triangle est toujours 180°.

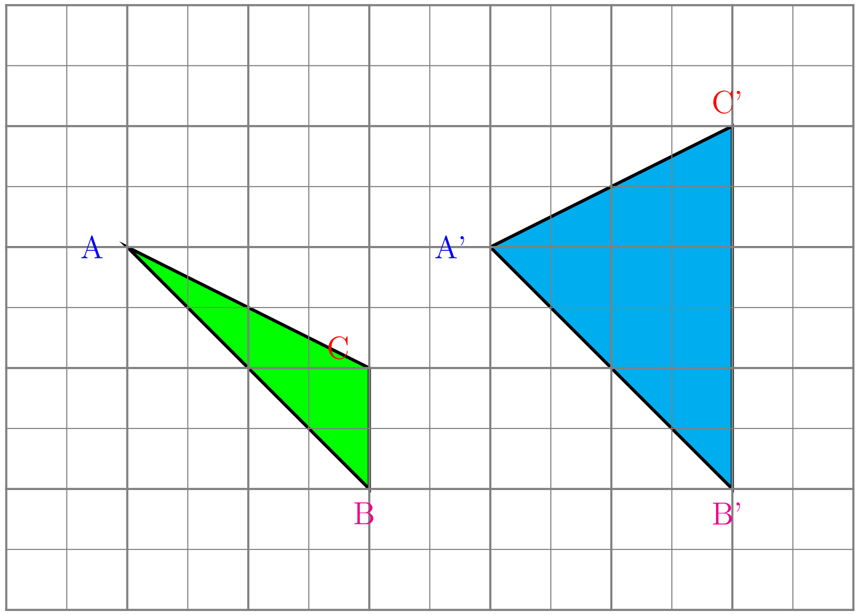
c) Si deux triangles ABC et A'B'C' vérifient :

AB=A'B'

AC=A'C'

et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

alors ils sont isométriques.
Exemple : On peut avoir
AB=A'B'
AC=A'C'
et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
sans que ABC et A'B'C' soient forcément isométriques :



On a :

(**1**) AB=$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$=A'B'

(**2**) AC=$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$=A'C'

(**3**) $\widehat{ABC} = 45° = \widehat{A'B'C'}$

mais BC=2 alors que B'C'=6...