<u>Déplacements et Antidéplacements</u>

<u>Rappel de Cours Partie</u> 1:

On considère le plan (P) euclidien orienté. Une isométrie f sur (P) est une application de (P) dans (P) vérifiant:
"Pour tout couple (A; B) de points de (P), **AB = f(A)F(B)**"
Une isométrie, comme son nom l'indique, est donc une application <u>conservant les distances</u>.

<u>I : Petits Rappels de Base</u>

f étant une isométrie de (P), on a alors les propriétés suivantes.
On note Id l'identité sur (P) : I(M) = M pour tout M dans (P)

<u>Propriété I:1:</u>
Si f admet 3 points fixes non alignés, alors f est l'identité de (P) : f = Id.
Ou encore:
S'il existe 3 points A, B et C non alignés tels que f(A) = A, f(B) = B et f(C) = C alors pour tout point M de (P), f(M) = M.

<u>Propriété I:2</u>:
Si f admet 2 points A et B fixes distincts alors pour tout point M de la droite (AB), f(M) = M .

<u>Propriété I:3:</u>
Si f admet exactement un point fixe A, alors f est une rotation de centre A.

<u>Propriété I:4:</u>
Si f et g sont deux isométries de (P), alors l'application composée h = fog est aussi une isométrie de (P).
De plus, f est une bijection de (P) sur (P) et l'application réciproque de f, f^{-1}, est aussi une isométrie de (P).

<u>Propriété I:5:</u>
Si f est isométrie de (P) alors:
a: L'image d'une droite par f est une droite. (<u>Conservation de l'alignement</u>)
b: L'image de 2 droites parallèles par f sont 2 droites parallèles. (<u>Conservation du parallélisme</u>)
c: L'image de 2 droites perpendiculaires par f sont 2 droites perpendiculaires. (<u>Conservation de l'orthogonalité)</u>
d: L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par f est un cercle de centre f(O) et de rayon R. (<u>conservation de la cocyclique et du rayon</u>) .
e: Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$ (<u>conservation de l'équipollence</u>)
f: Si G est le barycentre du système {(A,a) ; B(b)} alors f(G) est le barycentre du système {(f(A),a) ; f(B),b)} (<u>conservation des barycentres</u>).
g: Si A, O et B sont 3 points distincts de (P) alors les angles non orientés <u>(AOB) et (f(A)f(O)f(B)) sont égaux.</u>
f: Si (Q) est une partie de (P) alors (Q) et l'image de (Q) par f ont même aire. <u>(Conservation des aires).</u>

Par la suite, on note I(P) l'ensemble des isométries de (P).

<u>II : Décompostion des Isométries:</u>

f est une isométrie de (P) et O un point quelconque de (P). Posons O' = f(O) et t' la translation telle que t'(O') = O.
L'application g définie sur (P) par : g = tof , est une isométrie de (P). De plus, g(O) = t'of(O) = t'(O') = O.
g est donc une isométrie de (P) admettant O comme point fixe (ou laissant O invariant).
Comme g = t'of , on a : tog = f où t est la translation vérifiant t(O) = O'.
On peut donc décomposer f sous la forme f = tog, où t est une translation et g une isométrie laissant O invariant.

Réciproquement:
Si tog = uoh où t et u sont 2 translations et g et h 2 isométries laissant O invariant, alors (u^{-1} o t) = (h o g^{-1}).
Mais (u^{-1} o t) est un translation (composée de 2 translations) laissant O invariant (car h o g^{-1} (0) = 0), donc cette translation est l'application identité sur (P).
Donc t = u et g = h.D'où:

<u>Propriété II:1:</u>
Si f est une isométrie de (P) et O un point de (P) alors il existe une translation unique t et une isométrie unique g laissant O invariant
telles que. f = tog.

<u>III : Déplacements - Antidéplacements</u>
Une isométrie de (P) f <u>laissant un point O invariant est une rotation ou une réflexion</u>.
Soient A, B et C trois points non alignés de (P). A'=f(A) , B'=f(B) et C'=f(C) sont aussi trois points non alignés.

Dans le cas où f est une rotation, alors les angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ admettent une <u>même mesure.</u>

Dans le cas où f est une réflexion, les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ admettent des <u>mesures opposées.</u>

De plus, les <u>translations</u> <u>conservent les angles orientés</u>.
On en déduit alors que pour une isométrie f quelconque, si O un point fixé dans (P), en écrivant f = tog où t est une translation et g une isométrie laissant O invariant, le fait que f conserve ou non les angles orientés ne dépend que de la nature de g.

Ceci conduit aux définitions suivantes:

<u>Définition</u> :
Si f est une isométrie de (P), on a dit que f est un <u>DEPLACEMENT</u> de (P) si f <u>conserve les angles orientés.</u>
On dit que f est un <u>ANTIDEPLACEMENT</u> si les angles orientés sont <u>changés en leur opposé</u>.

Propriété III:1:
Toute isométrie de (P) est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

<u>Propriété III:2:</u>
La composée de 2 déplacements est un déplacement.
La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un anidéplacement est un antidéplacement.
La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

<u>Remarque:</u>
Considérons *e* l'application définie de I(P) sur {-1;1} par :
" *e*(f) = -1 si f est un antidéplacement et *e*(f) = 1 si f est un déplacement."
Alors , pour n élément de I(P) , f_1 ; f_2 , ..., f_n , on a : $e(f_1 \text{ o } f_2 \text{ o.... o } f_n) = e(f_1)e(f_2)....e(f_n)$
Si F est la composée de n déplacements et k antidéplacements, on a $e(F) = (-1)^k$.

Par exemple, si F = fogoh où f et g sont des déplacement et h un antidéplacement alors *e*(F) = -1.
F est donc un antidéplacement.
On peut alors voir une loi générale.

<u>"LA COMPOSEE D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE DEPLACEMENTS ET D'UN NOMBRE IMPAIR D'ANTIDÉPLACEMENTS EST UN ANTIDEPLACEMENT"</u>

<u>"LA COMPOSEE D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE DEPLACEMENTS ET D'UN NOMBRE PAIR D'ANTIDEPLACEMENTS EST UN DEPLACEMENT"</u>

Déplacements et Antidéplacements

Rappel de Cours Partie 2:

Les déplacements de (P), plan muni d'un repère orthonormé orienté, sont les isométries conservant les mesures des angles orientés.

I : Déplacement **(Caractérisation, Composition, Expression analytique, Exemples)**

Propriété I:1:
Si deux déplacements f et g sont tels qu'il existe deux points A et B distincts tels que f(A)=g(A) et f(B)=g(B)
alors f = g.
En particulier, si un déplacement f admet deux points distincts invariants alors f est l'identité sur (P).

Effectivement, la composée de deux déplacements est un déplacement et la réciproque d'un déplacement est un déplacement.
Donc, si f(A)=g(A) et f(B)=g(B) alors fog^{-1} est un déplacement admettant deux point invariants.
C'est donc une rotation ou une translation. Et donc l'application identité (car il y a deux points invariants distincts dans le plan (P)).
D'où f = g.

Propriété I:2:
Si A et B sont deux points distincts et si A' et B' sont deux points tels que AB = A'B' alors
Il existe un unique déplacement f tel que f(A) = A' et f(B) = B'.
De plus, f est soit une translation soit une rotation.

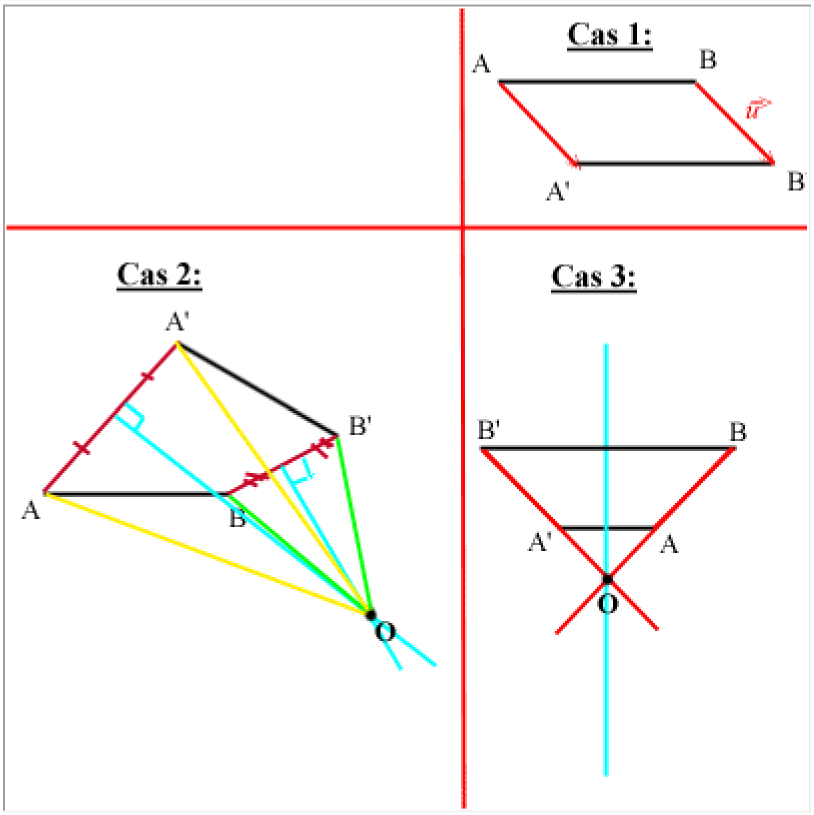
Remarquons que si ABB'A' est un parllélogramme, f est alors une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. (Cas 1:)

Dans les autres cas, f est une rotation d'angle orienté (AB, A'B') et dont le centre O doit être équidistant des points A et A', et des points B et B'.

Si, par exemple, A ≠A' et B ≠B', alors le centre O de cette rotation est :
- le point d'intersection des médiatrices de [AA'] et [BB'] (Cas 2).
- le point d'intersection de (AB) et (A'B') sinon (cas 3).

Le cas le plus direct est celui où, par exemple, B = B'.
Il suffit alors de choisir pour f la rotation de centre B telle que f(A)=A'.

La construction des éléments de f est donc assez simple.



Propriété I:3:
Si <u>f et g sont 2 rotations</u> de centres respectives A et B et d'angles respectifs a et b, alors <u>fog est une rotation d'angle (a+b) à 2p près.</u>
De plus, si f et g ont <u>même centre</u> alors <u>fog est aussi de centre A = B</u>.
En général, fog # gof.

Expressions Analytiques.
<u>**A:**</u> Un déplacement dans (P) est une translation ou une rotation.
Dans le cas d'une translation t, de vecteurs de coordonnées (a ; b), l'expression analytique de t est :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Dans le cas de la rotation R de centre W (a; b) et d'angleθ, R est la composée de la rotation de centre O, centre du repère, et d'angle θ ,
et de la translation de vecteur u(a ; b). R = toR', R' = rotation ce centre O, d'angle θ , et t translation de vecteur u(a;b).

On en déduit que l'expression analytique de R est : $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases}$

Remarquons que si A, B , A' et B' sont 4 points tels que <u>AB = A'B'</u>, il <u>existe un unique déplacement f tel que f(A)=A' et f(B)=B'.</u>
Dans le cas où ce déplacement est une rotation, l'angle θ de cette rotation est déterminée par les relations: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{A'B'}\|} \\ \sin\theta = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{A'B'}\|} \end{cases}$, avec $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = ab' - ba'$

<u>II Antidéplacement</u>

On sait que la composée d'un nombre pair d'antidéplacements est un déplacement, c'est à dire, une translation ou une rotation.
On sait aussi que si <u>S et S' sont deux réflexions</u> par rapport à <u>des droites (D) et (D')</u>, alors:

- SoS' est une <u>translation si (D) et (D') sont parallèles</u>, le vecteur u de la translation étant un vecteur normal à (D) et (D').
- SoS' est <u>une rotation si non</u>, le <u>centre de cette rotation étant le point d'intersection de (D) et (D')</u>, <u>l'angle</u> de cette rotation étant <u>2Angle(D',D)</u>, l'angle (D',D) étant donné à π près .

Soit f un antidéplacement de (P).
Soit S une réflexion quelconque. La composée g = foS est alors un déplacement, donc une translation ou une rotation.
On peut donc écrire que g = S"oS' où S" et S' sont deux réflexions, S' étant choisie arbitrairement.
Comme SoS =identité sur (P), on a alors : S"oS'oS = f
On voit donc que:

<u>Propriété II:1:</u>
Tout <u>antidéplacement est la composée</u> d'un <u>déplacement et d'un réflexion</u> : f = goS

Ce produit est alors de deux natures: g est soit une <u>translation</u> , soit une <u>rotation</u>.
Pour g translation on a 2 cas:

- **<u>Cas 1: le vecteur u de cette translation est normal à (D), axe de la réflexion S.</u>**
  On écrit alors g = S"oS' où S" et S' sont deux réflexions d'axes parallèles (D") et (D'), avec u normal à (D")et (D').
  Donc, les droites (D), (D') et (D") sont parallèles.
  On peut alors choisir (D') = (D). Donc S'= S et f = S"oS'oS = S". Donc, f est la réflexion S".
- **<u>Cas 2: le vecteur u n'est pas normal à (D).</u>**
  On écrit u = v + w où v est un vecteur directeur de (D) et w un vecteur normal de (D).
  Les translations T_v et T_w de vecteurs respectifs v et w vérifient alots g = T_voT_w .
  On a a donc f = T_vo(T_w oS) . Comme (T_w oS) est une réflexion d'axe (D") parallèle à (D) d'après le cas 1, on en déduit que f est la composée d'un translation de vecteur v et d'un reflexion d'axe (D"), v étant vecteur directeur de (D").<u>symétrie glissante</u>

D'où:
Propriété II:2:
La composée d'une translation T de vecteur u et d'une réflexion S d'axe (D) est
- une réflexion si u est normal à (D)
- la composée d'un translation T_v de vecteur v, directeur de (D), et d'une réflexion d'axe parallèle à (D) sinon c'est une symétrie glissante

On voit sur les figures ci-dessous les deux cas:

Figure 1 : Le vecteur u est normal à (D)

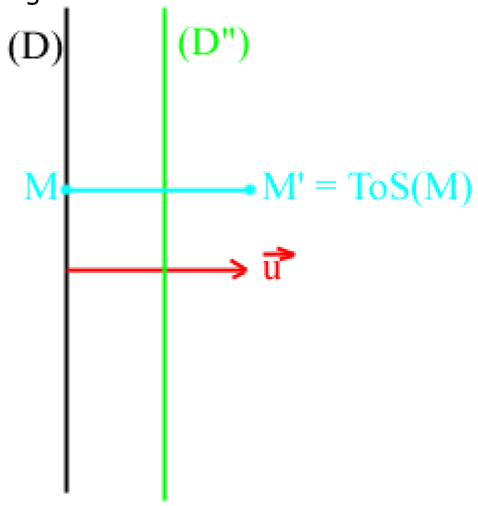
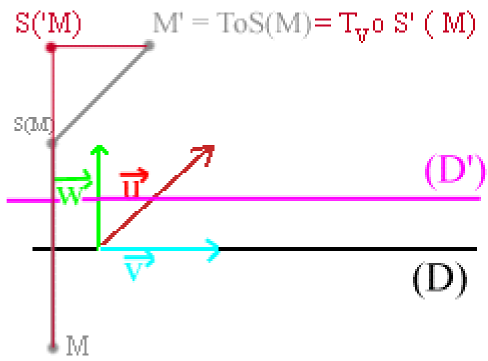


Figure 2: Le vecteur u n'est pas normal à (D)



Conclusion :
Un produit (ou une composition) d'un nombre impair d 'antidéplacements se décompose en :
- Soit une réflexion
- Soit une composée d'un translation et d'une réflexion le vecteur de la translation étant un vecteur directeur de l'axe de la réflexion.

Déplacements et Antidéplacements

Rappel de Cours Partie 3:

I : Déplacement
Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct, un point M peut être assimilé à son affixe z.
Si M a pour coordonnées (x ; y) , l'affixe de M est le nombre complexe z = x + iy où i est le nombre complexe d'argument π /2 vérifiant $i^2 = -1$.

Si *a* est un nombre complexe de module 1, $|a| = 1$, alors la multiplication de z par *a* revient à déterminer le nombre complexe $z' = az$ tel que:
$|z'|=|z|$ et $\mathrm{Arg}(z') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(a)$ à $2k\pi$ près .
Géométriquement, ceci revient à appliquer à M la rotation de centre O, centre du repère, et d'angle Arg(*a*).

La translation de vecteur u(X ; Y) a pour expression analytique " x' = x + X , y' = y + Y".
Si on pose $b = X + iY$, l'image de M par cette translation est alors le point M' d'affixe $z' = z + b$.

Comme un déplacement f peut toujours d'écrire sous la forme f = toR, où R est une rotation de centre O, on en déduit que l'expression complexe d'un déplacement est la forme: $z' = a z + b$, où *a* est un complexe de module 1.

Propriété I:1:
f est un déplacement dans (P) si et seulement son expression complexe est de la forme

$z' = a z + b$, où $|a| = 1$.
Dans ce cas, f est une translation si $a = 1$, et une rotation si non.
Le centre W de la rotation, dans ce dernier cas, est le point d'affixe w vérifiant : $w = aw + b$, car W est point invariant de f.
L'angle de f est l'argument de *a*.

II : Antidéplacement
On sait que la composée de deux antidéplacements est un déplacement.
De plus, la réflexion S par rapport à la droite des abscisses "y = 0" a pour expression complexe $z' = \overline{z}$.
Si f est un antidéplacement, alors D = Sof est un déplacement.
L'expression complexe de D est $z' = a z + b$, où *a* est un complexe de module 1.
Or, si D = foS alors DoS = f (car SoS = S).
Pour un point M d'affixe z, d'image M' d'affixe par f, on a donc: $M(z) \mapsto S(M(\overline{z})) \mapsto f(M) = DoS(M(a\overline{z} + b))$
Doù :
Propriété II:1:
f est un antidéplacement dans (P) si et seulement si son expression complexe est de la forme
$z' = a\overline{z} + b \quad \text{où } |a| = 1$