ETUDE DE FONCTIONS *SAI.Fethi*

Fonctions paires

- **Définition :** Une fonction f de domaine de définition Df est paire si et seulement si, pour tout x de Df on a (-x) $\in$ Df et f(-x) = f(x).
  Df = D1 U D2 avec D1 $\subset$ IR + et D2 $\subset$ IR - ; D1 et D2 sont symétrique par rapport à 0.
- **Domaine d'étude :** On étudie une fonction paire f sur D1 par exemple ; l'étude de f sur D2 s'en déduit :
  * Si f est croissante sur D1 alors f est décroissante sur D2 .
  * Si f est décroissante sur D1 alors f est croissante dur D2.
- **Représentation graphique :**

Soit C la courbe représentative d'une fonction paire f dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On a C= C1 U C2 avec C1 la partie de C correspondant à D1 et C2 la partie de C correspondant à D2 ; C1 et C2 sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- **Axe de symétrie :** Soit f une fonction définie sur un domaine D $\subset$ IR et soit (C) sa courbe représentative relativement à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
  La droite Δ : x = a est un axe de symétrie pour la courbe (C) si et seulement si pour tout x de D, on a (2a-x) $\in$ D et f(2a-x) = f(x) .

Fonctions impaires :

- **Définition :**

Une fonction f de domaine de définition Df est impaire si et seulement si, pour tout x de Df on a (-x) $\in$ Df et f(-x) = -f(x).

Df = D1 U D2 avec D1 $\subset$ IR + et D2 $\subset$ IR - ; D1 et D2 sont symétrique par rapport à 0.

- **Domaine d'étude :**

On étudie une fonction impaire f sur D1 par exemple, l'étude de sur D2 s'en déduit :
Si f est croissante sur D1 alors f est croissante sur D2.Si f est décroissante sur D1 alors f est décroissante sur D2.

- **Représentation graphique :**

Soit C la courbe représentative d'une fonction impaire f dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On a C= C1 U C2 ; C1 et C2 sont symétrique par rapport au point O.

Centre de symétrie :

Soit I (a, b) et (C) la courbe représentative d'une fonction f relativement dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$ f définie sur un domaine D $\subset$ IR ;

I(a,b) est un centre de symétrie de(C) si et seulement si pour tout x de D on a :
(2a-x) $\in$ D et f(2a-x)=2b-f(x).

Fonctions périodiques :

Définition :

Soit une fonction numérique définie sur un domaine D $\subset$ IR. La fonction f est périodique s'il existe un réel a non nul tel que : Pour tout x de D on a :

$(a+x) \in D$ et $f(a+x) = f(x)$ (*)

Le réel a est appelé période de f , et dans le cas ou c'est le plus petit réel strictement positif vérifiant :
(*) ;On l'appelle la période de f :
On dit que f est une fonction T périodique ou périodique de période T.

- Les fonctions $x \to \cos(ax+b)$ et $x \to \sin(ax+b)$; $(a,b) \in$ IR* x IR sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.
- la fonction $x \to tg(ax+b)$; (a,b) IR* x IR sont périodiques de période $\frac{\pi}{|a|}$.

- **Domaine d'étude et courbe représentative** :

Pour l'étude d'une fonction f ; T périodique sur un domaine D , il suffit de restreindre à un ensemble D0 de la forme : $[x_0 , x_0 + T[\cap D$.
La courbe représentative de f sur D se déduit de celle de la restriction de f à D0 par des translations de vecteur $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$

Extremas :

- **Définition :**

Soit f une fonction définie sur un domaine D $\subset$ IR et soit x_0 un élément de D. On dit que la fonction f admet un minimum relatif (respectivement un maximum relatif) en x_0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que pour tout x de $J \cap D$, on ait : $f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).

On dit que $f(x_0)$ est un extremum relatif si c'est un maximum relatif ou un minimum relatif.
Si pour tout x de D, on a $f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$), on dit que $f(x_0)$ est un minimum absolu (respectivement un maximum absolu) de f.
Un minimum absolu ou un maximum absolu est un extremum absolu.

- **Théorème** :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

1) Si f admet un extremum relatif en un point x_0 de I alors $f'(x_0) = 0$
2) Si f s'annule en un point x_0 de I en changeant de signe alors f admet un extremum relatif en x_0.

Point d'inflexion :

- **Définition**:

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f , dans un plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Un point I de (C) est un point d'inflexion de (C) si et seulement si (C) traverse sa tangente en I .

- **Théorème :**

Soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle ouvert contenant x0. Si f '' s'annule en x_0, en changeant de signe, alors le point M_0 de la courbe représentative (C) de f d'abscisse x_0, est un point d'inflexion de (C).

Point anguleux :

Si (C) admet deux demi- tangentes sécantes en M_0 $(x_0, f(x_0))$ alors ce point est dit anguleux.

Branches infinies :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporte à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit M un point de (C) de coordonnes (x, y).

* Si x ou y tend vers l'infini, on dit que (C) admet une branche infinie.

*Si (C) s'approche d'une droite sous certaines conditions, on dit que cette droite est une asymptote à (C).

- **Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses :**

La droite d'équation y=b est une asymptote a la courbe C si et seulement si

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$;($b\in$ IR).

Remarque : le signe de f(x)-b détermine la position de (C) par rapport à son asymptote.

- **Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées:**

La droite d'équation x = a, ($a\in$ IR), est une asymptote a la courbe C si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=-\infty$.

- **Asymptotes obliques :**

La droite D : y = ax + b ; $a\neq 0$ est une asymptotes obliques à la courbe représentative (C) de f si et seulement si :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)]=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)]=0$.

Remarque :

le signe de f(x) - (ax+b) permet de situer la courbe représentative (C) de f par rapport à son asymptote.

Théorème :

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$.La droite d'équation y=a x+b, ($a\in$ IR*, $b\in$ IR) est une asymptote oblique à la courbe représentative (C) si et seulement si :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b \text{ ou } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b.$$

Directions asymptotiques

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f vérifiant :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$. **Soit M(x,f(x))** $\in (C)$;

Il arrive que la courbe représentative (C)de f n'admette pas d'asymptote .Cependant la droite (OM)tends vers une position limite .On dit alors que la courbe admet une direction asymptotique .

Définition :

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f vérifiant :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

***On dit que la droite d'équation y=a x** ,(a $\in$ IR),**est une direction asymptotique de (C) si:**

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$

***On dit que l'axe des ordonnées (la droite d'équation :x=0) est une direction asymptotique de (C) si :**

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Plan d'étude d'une fonction :

Généralement, on étudie une fonction selon le plan suivant :

1) **Détermination des domaines de définition et de continuité de la fonction.**
2) **Choix d'un domaine d'étude qui tient compte des particularités éventuelles de la fonction :(parité, périodicité,…).**
3) **Calcul éventuelle des limites aux bornes du domaine d'étude et détermination des branches infinies.**
4) **Etude de la dérivabilité de f dans le domaine d'étude, calcul de la fonction dérivée, étude de son signe et détermination sens de variation de f .**
   On dressera ensuite un tableau de variation dans lequel seront consignées les principaux résultats dégagés ainsi que les extrema éventuels de f.
5) **Détermination éventuelle des points anguleux et des demi- tangentes.**

Constructions de la courbe représentative (C) de la fonction f dans un plan rapporté à un repère $\mathfrak{R}$; en indiquant les propriétés remarquable de (C)
(Axes ou centres de symétries, points d'inflexions s'ils sont demandés, tangentes ou demi-tangentes en des points particuliers….).

SAI.Fethi