Isométries du plan : les définitions

Les premières transformations auxquelles on va s'intéresser sont les *isométries*.

Une *isométrie* f du plan est une transformation du plan qui conserve les distances, c'est-à-dire que : pour tous les points M et N du plan, si M' et N' désignent leurs images par f, on aura $MN = M'N'$.

On peut démontrer que les isométries transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.
Plus précisément, f désignant une isométrie :
l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$; ces deux segments ont la même longueur ;
l'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$;
l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre $f(A)$ et de rayon r.

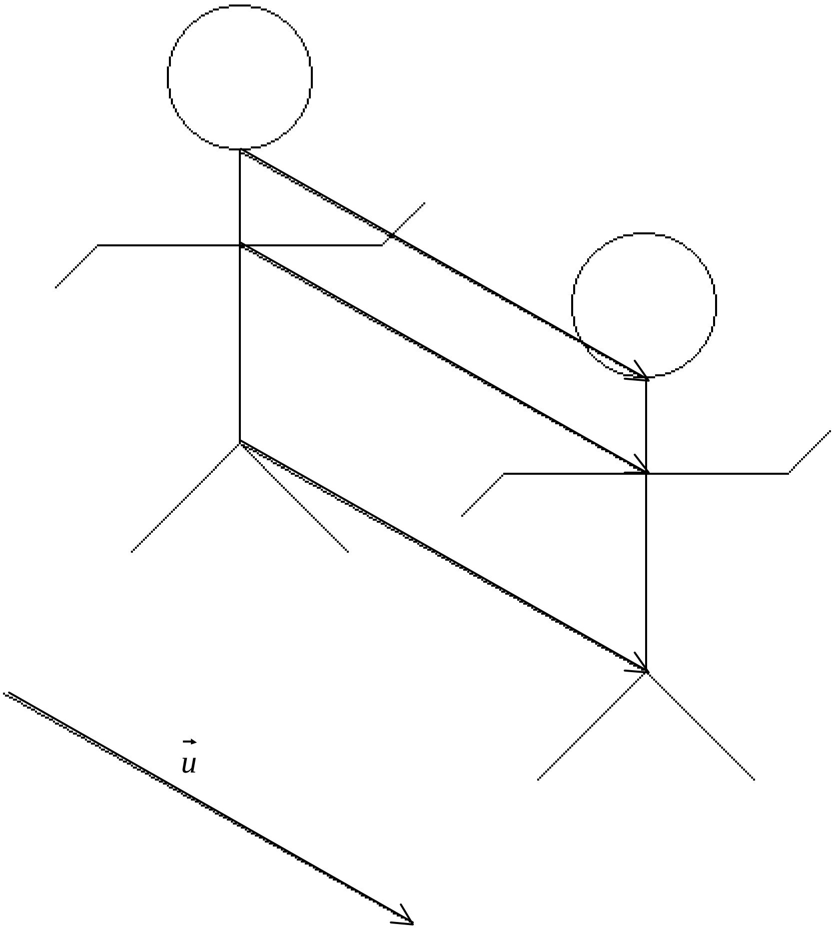
On dit que les isométries *conservent le parallélisme* parce que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
On dit qu'elles *conservent la perpendicularité* parce que les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
On dit qu'elles *conservent les milieux* parce que si I est le milieu du segment $[AB]$ $f(I)$ est le milieu de $[f(A)f(B)]$.
Plus généralement les isométries *conservent les barycentres*.
Cela signifie que si G est le barycentre des points pondérés $(A_1\,;\alpha_1)$, $(A_2\,;\alpha_2)$ ... $(A_k\,;\alpha_k)$, son image $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A_1)\,;\alpha_1)$, $(f(A_2)\,;\alpha_2)$ ... $(f(A_k)\,;\alpha_k)$.
On dit qu'elles *conservent les angles non orientés* parce que si l'on ne tient pas compte de l'orientation les angles $A\hat{B}C$ et $A'\hat{B}'C'$ sont égaux (A, B et C désignent des points distincts et A', B' et C' désignant leurs images.

Les isométries qui conservent l'orientation des angles s'appellent des *déplacements.*
Les isométries qui renversent l'orientation des angles s'appellent des *antidéplacements* ou des *retournements*..
La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, ou d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.

Il apparaîtra dans ce cours qu'il existe dans le plan quatre sortes d'isométries : les *translations*, les *rotations*, les *symétries axiales* et les *symétries glissées*.
Les translations et les rotations sont des déplacements, les symétries axiales et les symétries glissées sont des antidéplacements.

Voici les définitions correspondantes :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La *translation* de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



La réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$: $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

La composée de deux translations est une translation : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

La translation de vecteur $\vec{0}$ est l'identité : $t_{\vec{0}} = id$.

Une translation autre que *id* n'a pas de point fixe.

Soit Ω un point du plan et α un angle orienté. La *rotation* de centre Ω et d'angle α, notée $r_{\Omega;\alpha}$ est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $M' = M$ si $M = \Omega$ et tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$ sinon.

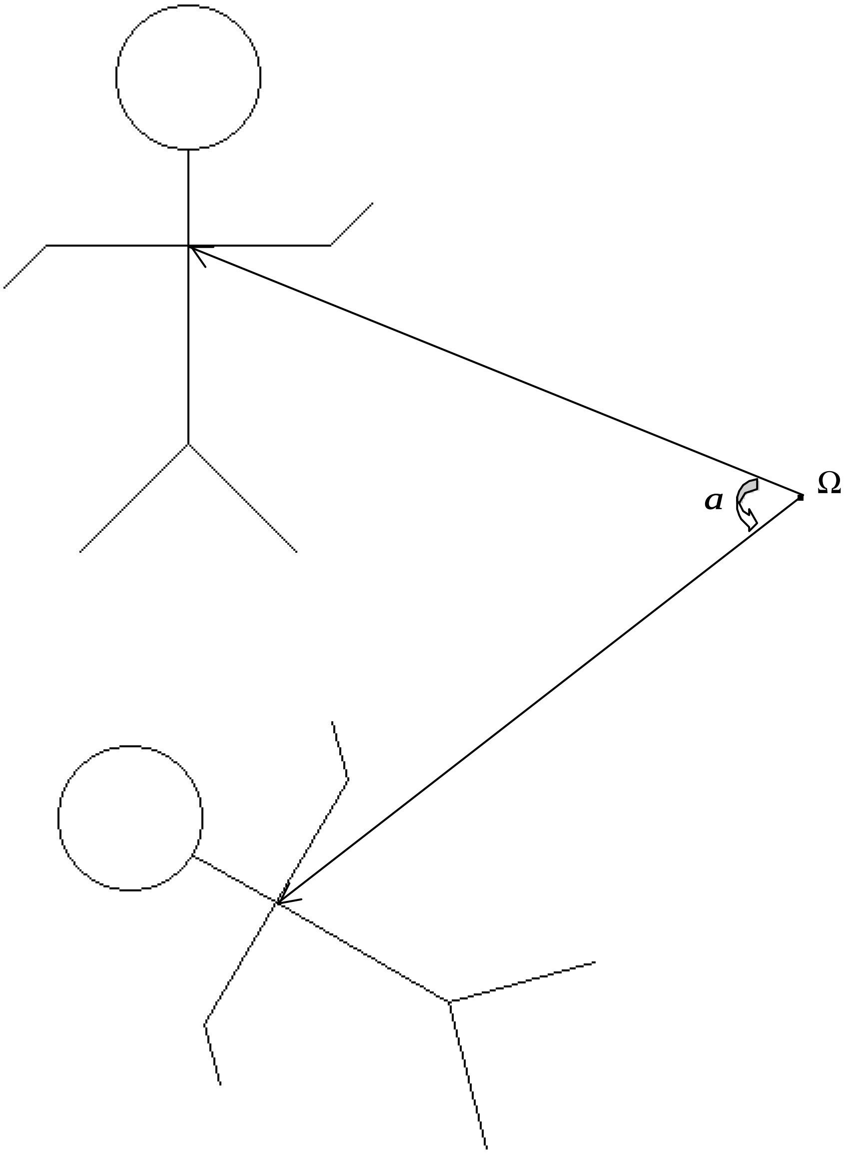
Si $\alpha = 0\ [2\pi]$, $r_{\Omega;\alpha}$ est l'identité. Si $\alpha \neq 0\ [2\pi]$, $r_{\Omega;\alpha}$ n'a que Ω comme point fixe.

Si $\alpha = \pi\ [2\pi]$, $r_{\Omega;\alpha}$ est la *symétrie centrale* de centre Ω, notée s_Ω.

La réciproque de la rotation de centre Ω et d'angle α est la rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$: $r_{\Omega;\alpha}^{-1} = r_{\Omega;-\alpha}$.

Il est facile de composer deux rotations de même centre : $r_{\Omega;\alpha} \circ r_{\Omega;\beta} = r_{\Omega;\alpha+\beta} = r_{\Omega;\beta} \circ r_{\Omega;\alpha}$.

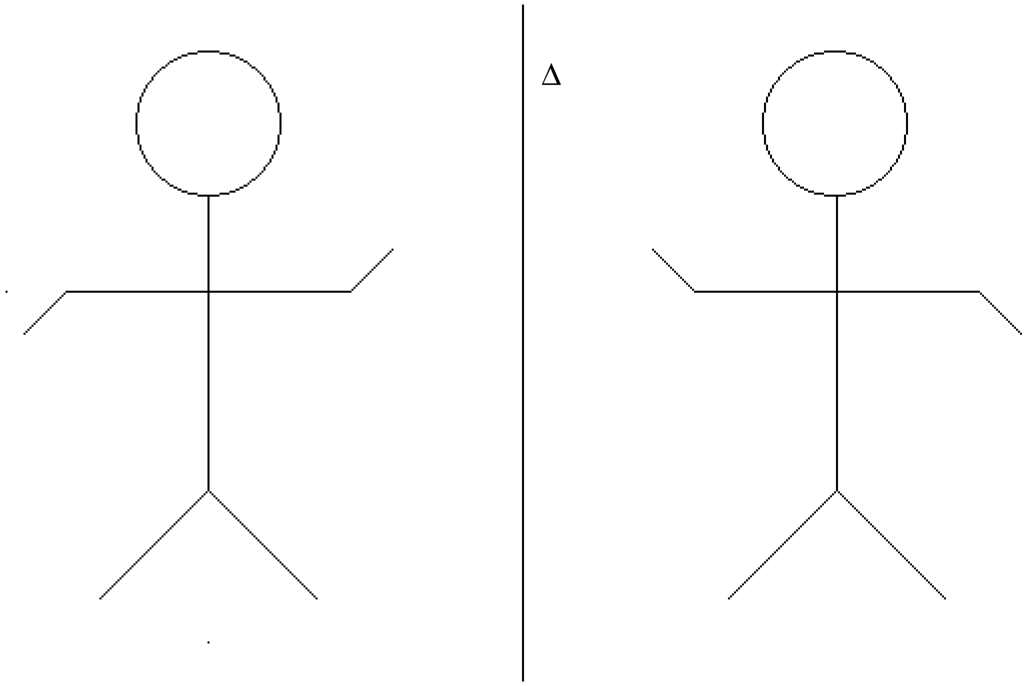
En particulier $s_\Omega o s_\Omega = id$: ${s_\Omega}^{-1} = s_\Omega$.



Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan, et A' et B' leurs images respectives par $r_{\Omega;a}$, on aura : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}\right) = a$.

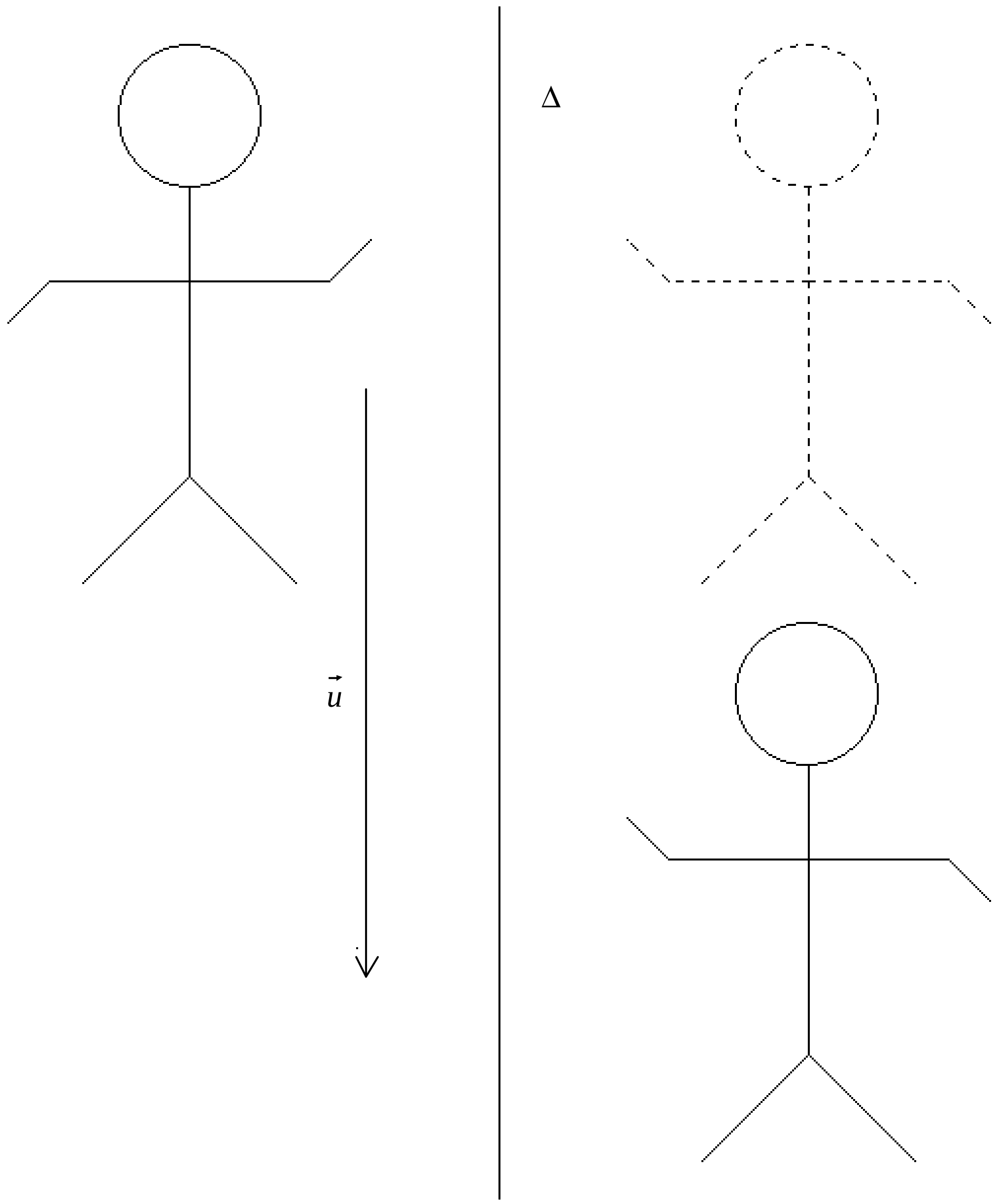
Soit Δ une droite du plan. La *symétrie axiale* d'axe Δ, notée s_Δ, est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $M' = M$ si $M \in \Delta$ et tel que Δ soit la médiatrice de $[MM']$ si $M \notin \Delta$.



A la place de « symétrie axiale », on peut aussi dire « réflexion » ou « symétrie orthogonale ».
La réciproque de la symétrie axiale d'axe Δ est elle-même : $s_\Delta^{-1} = s_\Delta$; $s_\Delta o s_\Delta = id$.
Les points fixes de s_Δ sont les points de Δ .

> Soit Δ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ . La *symétrie glissée* d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, notée $s_{\Delta;\vec{u}}$, est la transformation $t_{\vec{u}} o s_\Delta$.

$s_{\Delta;\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta = s_\Delta o t_{\vec{u}}$. $s_{\Delta;\vec{u}} o s_{\Delta;\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$.
Une symétrie glissée n'a pas de point fixe.
La réciproque de la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.



Δ
$\vec{u}$