Cours : Les Nombres Complexes

I. Définitions :

On appelle un nombre complexe le nombre $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et i le nombre tel que $i^2=-1$

- a est appelée la partie réelle de z , notée : $Re(z)$; b est appelée la parie imaginaires de z notée $Im(z)$.
- l'écriture du nombre complexe $z = Re(z) + i\, Im(z)$ s'appelle la forme cartésienne de z ou bien la forma algébrique de z.
- si $a=0$ z est dit imaginaire pure, si $b=0$ z est dit réel .
- l'ensemble des nombres complexes est noté : $\mathbb{C}$. On remarque bien que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.

On appelle le conjugué du nombre complexe z le nombre $\bar{z} = a - ib$.

On appelle le module du nombre complexe z le réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

II. Propriétés :

-à tout nombre complexe $z = a+ib$ on peut lui associer le point du plan, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point $M(a,b)$.On dit que le nombre z est l'affixe du point M.

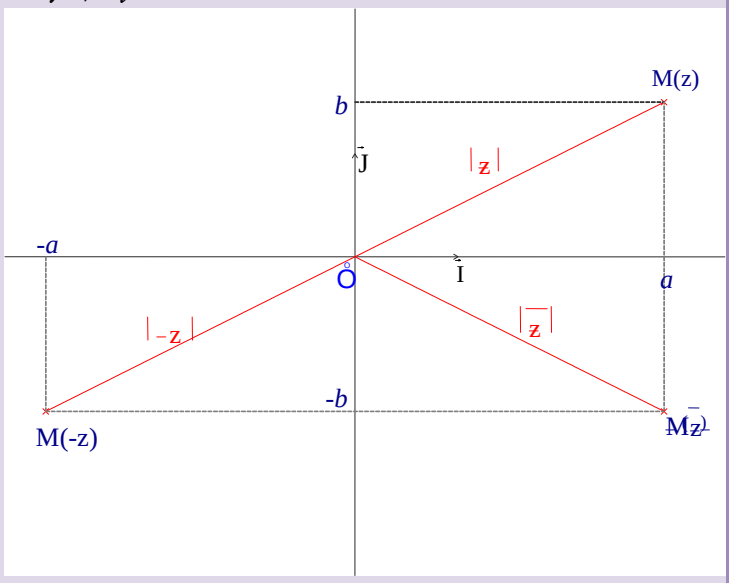
Le Module

- $|\bar{z}| = |z|$, $|-z| = |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$, $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Le Conjugué

- $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{(zz')} = \bar{z}\bar{z'}$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2ib$
- Si $z \in \mathbb{R}$ alors $z = \bar{z}$
- Si $z \in i\mathbb{R}$ alors $z = -\bar{z}$
- $z \times \bar{z} = |z|^2$, $\bar{\bar{z}} = z$

Le Graphique



III. Aspect graphique :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$	Dans le repère Cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$
• $z = a + ib$	• $M(a ,b)$
• $Z_B - Z_A$	• $\overrightarrow{AB}$
• $Z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	• I est le milieu de $[AB]$
• $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	• OM
• $\lvert z_B - z_A\rvert$	• AB

• $\dfrac{Aff(\vec{u})}{Aff(\vec{v})} \in \mathbb{R} \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$	• $\vec{u} // \vec{v}$
• $\dfrac{Aff(\vec{u})}{Aff(\vec{v})} \in i\mathbb{R} \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$	• $\vec{u} \perp \vec{v}$
• $z \in \mathbb{R}$	• $M \in (xx')$
• $z \in i\mathbb{R}$	• $M \in (yy')$

IV. Forme trigonométrique & exponentielle :

Soit $z = a+ib \neq 0$ et on pose $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$

On peut écrire $z = r(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r})$ donc on a $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$ et $\left|\frac{a}{r}\right| \leq 1$; $\left|\frac{b}{r}\right| \leq 1$ alors il existe

$\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{a}{r} = \cos\theta$ et $\frac{b}{r} = \sin\theta$. Donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$: c'est la forme trigonométrie de z.

θ est appelé l'argument de z notée : arg(z)

V. Astuces pour déterminer l'argument :

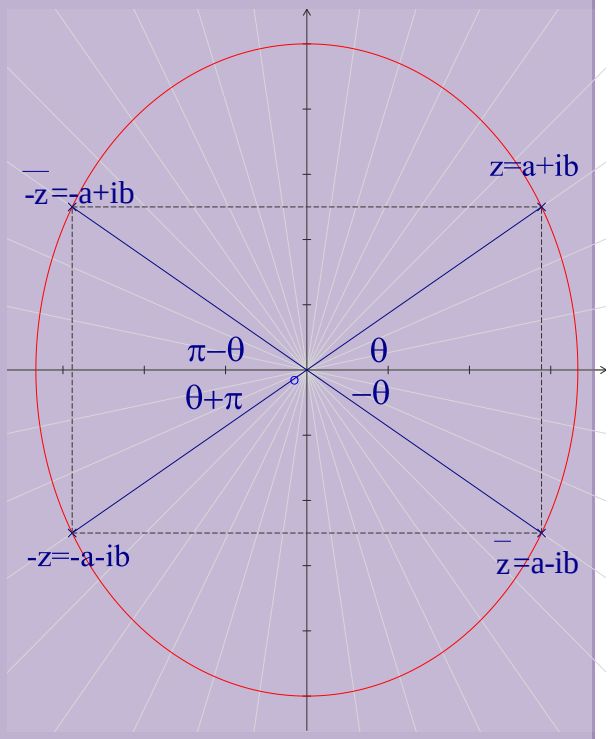
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Si $arg(a+ib) \equiv \theta\,[2\pi]$ alors :

- $arg(a-ib) \equiv -\theta\,[2\pi]$; $arg(-a+ib) \equiv \pi-\theta\,[2\pi]$
- $arg(-a-ib) \equiv \pi+\theta\,[2\pi]$

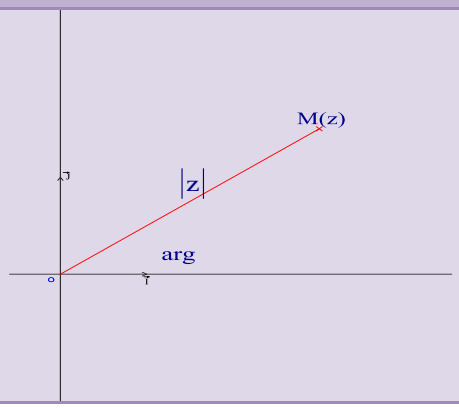
$$z = a \quad alors : \begin{cases} |z| = a \ \text{ et } arg(z) \equiv 0[2\pi] \ , si\ a > 0 \\ |z| = -a \ \text{ et } arg(z) \equiv \pi[2\pi] \ , si\ a < 0 \end{cases}$$

$$z = ib \quad alors : \begin{cases} |z| = b \ \text{ et } arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \ , si\ b > 0 \\ |z| = -b \ \text{ et } arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \ , si\ b < 0 \end{cases}$$



VI. Propriétés :

- $arg(z) \equiv (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$
- $arg(z_B - z_A) \equiv (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$
- $arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$



- $arg(z \times z') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$
- $arg(z^n) \equiv n\,arg(z)[2\pi]$
- $arg(\frac{1}{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$
- $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$
- $\begin{cases} arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi] \\ arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi] \end{cases}$
- $(cos(\theta) + i\,sin(\theta))^n = cos(n\theta) + i\,sin(n\theta)$ (*formule de Moivre*).
- *$Z=r(\cos\theta + i\sin\theta)=[r\,,\,\theta]=r\,e^{i\theta}$ c'est la forme polaire et la forme exponentielle d'un nombre complexe.*

Propriétés de la forme polaire :

- $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$
- $[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$ $\quad \frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
- $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

La forme polaire est la plus utilisée pour les simplifications des formes trigonométriques et la résolution des équations du type : $z^n=a+ib$.

Propriétés de la forme exponentielle :

- $e^{i\theta} = cos(\theta) + i\,sin(\theta)$ $\quad et\,(\overline{e^{i\theta}}) = e^{-i\theta}$
- $\left.\begin{array}{l} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \end{array}\right\}$ *formules de Euler*
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}\,;\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}\,;\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $1 = e^{i0}\,;\quad -1 = e^{i\pi}\,;\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}\,;\ -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

VII. Applications dans le plan :

On considère dans le plan complexe muni du repère $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$ les applications suivantes :

- $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
  $M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$
  Alors T est une translation de vecteur : $\vec{\boldsymbol{w}}$ avec $aff(\vec{\boldsymbol{w}}) = b$.
- $H : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
  $M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = az + b$ où $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$
  Alors H est une homothétie de rapport : a , est de centre d'affixe $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1-a}}$.
- $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
  $M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = az + b$ où $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et tel que : $|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{1}$
  Alors R est une rotation d'angle :arg(a), et de centre d'affixe $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1-a}}$
- $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
  $M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = az + b$ où $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et tel que $|\boldsymbol{a}| \neq \boldsymbol{1}$:
  Alors S est une similitude direct de rapport $|\boldsymbol{a}|$,d'angle arg(a) et de centre d'affixe $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1-a}}$.

VIII. Racines et Equations :

On considère l'équation $z^n = a$ où $a \in \mathbb{C}$
On dit que z est la racine niéme de a pour résoudre l'équation on utilise la forme polaire ou exponentielle

En effet on pose z = [r , θ] alors $\begin{cases} r^n = |a| \\ n\theta \equiv arg(a)[2\pi] \end{cases}$

Soit l'équation suivante : $a z^2 + b z + c = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta \in \mathbb{R}+$ alors $z' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta \in \mathbb{R}-$ alors $z' = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z'' = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta \in \mathbb{C}$ alors on considère $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \text{ et } z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a} \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$
-