Cours : Les Suites Réelles

I. Définition :

On appelle une suite réelle l'application définie : $IN \to IR$

$n \to U(n)$, noté U_n où $n \in P(IN)$ et $U_n \in IR$.

Une suite peut être définie par son terme générale exemple : $U_n = f(n)$

ou bien de façon récurrente exemple : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où f(x) est une application de IR dans IR.

II. Théorème : (démonstration par récurrence).

Une démonstration par récréance se fait en trois étapes : (V ; S ; D).

Étant donnée une propriété P qu'on veut montrer pour tout terme de la suite U_n, pour cela :

- ✓ On Vérifie que cette propriété est vérifier pour le(ou les) premiers terme de la suite U_n.
- ✓ On Suppose que la propriété P reste vrai pour un ordre indéfinie (n, p, q …).
- ✓ On Démontre alors que cette propriété P reste encore vrai pour l'ordre suivant (n+1, p+1, q+1 …)

Application : Montrer que $\forall n \in IN$ on a $Un= 3^{2n+2}-2^{n+1}$ est divisible par 7.

(Réponse) : pour cela on démontre le résultat par récurrence :

i. Vérification : pour n =0 on a $U_0= 3^2-2^1= 7$ c'est bien divisible par 7.

ii. Supposition : on suppose que jusqu'à l'ordre p on toujours U_p est divisible par 7.

iii. Démonstration : Montrons alors que U_{p+1} est aussi divisible par 7 .

$U_{p+1}= 3^{2p+4}-2^{p+3} = 3^2 \times 3^{2p+2}- 2 \times 2^{p+1} = (7+2) \times 3^{2p+2} – 2x\, 2^{p+1} = 7 \times 3^{2p+2} + 2 \times (32n^{+2}-2^{n+1})$

$= 7 \times 3^{2p+2} + 2 \times U_p$. Comme le terme U_p est supposé divisible par 7 donc U_{p+1} est divisible par 7 « somme de deux termes divisible par 7 ». Par conséquent U_n est divisible par 7 pour toute valeur de $n \in IN$. (CQFD).

III. Suites particulières :

i- Suite arithmétique :

- ✓ Une suite arithmétique est donnée par $U_{n+1}= U_n+r$ où r est une constante réelle, r est la raison de U_n.
- ✓ Le terme général d'une suite arithmétique est donné par :

  $U_n= U_0 + nr$ ou bien $U_n = U_p + (n-p)\, r$ où $p \le n$ $\forall n \in IN$.
- ✓ La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par : $S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + ….. + U_n = \dfrac{(n-p+1)(U_n+U_p)}{2}$

ii- Suite géométrique :

- ✓ Une suite géométrique est donnée par $U_{n+1} = qU_n$ où q est une constante réelle , q est la raison de U_n .
- ✓ Le terme générale d'une suite géométrique est donné par $U_n = U_0q^n$ ou bien $U_n = U_pq^{(n-p)}$.
- ✓ La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par : $S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + ….+ U_n = U_p \dfrac{1-(q)^{(n-p+1)}}{1-q}$.

IV. Limite d'une suite géométrique :

Soit V_n une suite géométrique de raison q . Alors on a :

- ➢ si $q > 1$ et $V_0 > 0$ alors $\lim V_n= +\infty$.
- ➢ si $q > 1$ et $V_0 < 0$ alors $\lim V_n= -\infty$.
- ➢ si $–1 < q < 1$ et $V_0 > 0$ alors $\lim V_n= 0$.
- ➢ si $q <-1$ et alors V_n n'admet pas de limite.

Remarques importantes :

- ✓ Pour montrer qu'une suite est arithmétique il faut montrer que $U_{n+1}-U_n= r$ (où r = constante indépendante de n).
- ✓ Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique il suffit de trouver un contre exemple c'est à dire trois termes qui vérifient : $U_{p+1} + U_{p-1} \neq 2U_p$.
- ✓ Pour montrer qu'une suite est géométrique il faut montrer que $(U_n \neq 0)$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$
  (où q = constante indépendante de n).
- ✓ Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique il suffit de trouver un contre exemple c'est à dire trois termes qui vérifient : $U_{p+1}.U_{p-1} \neq (U_p)^2$.

V. Suites monotones :

- ✓ On dit qu'une suite est croissante resp (strictement croissante) si et seulement si $U_{n+1} \geq U_n$ ou bien $U_{n+1}/U_n \geq 1$ resp ($U_{n+1}/U_n > 1$) ou bien $U_{n+1}-U_n \geq 0$ resp ($U_{n+1}-U_n \geq 0$) .
- ✓ On dit qu'une suite est décroissante resp (strictement décroissante) si et seulement si $U_{n+1} \leq U_n$ resp ($U_{n+1} < U_n$) ou bien $U_{n+1}/U_n \leq 1$ resp ($U_{n+1}/U_n < 1$ ou bien $U_{n+1}-U_n < 0$ resp ($U_{n+1}-U_n < 0$) .
- ✓ on dit qu'une suite est monotone resp (strictement monotone) si et seulement si elle est croissante resp (strictement croissante) ou décroissant resp (strictement décroissante) .

VI. Suites et ordres :

- ✓ Une suite est majorée si et seulement si il existe un réel a tel que pour tout $n \in IN$ $U_n \leq a$.
  $\forall n \in IN$, $U_n \leq a$.
- ✓ Une suite est minorée si et seulement si il existe un réel b tel que pour tout $n \in IN$ $U_n \geq b$.
  $\forall n \in IN$, $U_n \geq b$.
- ✓ Une suite est dite bornée si elle est minorée et majorée en même temps.
  $\forall n \in IN$, $b \leq U_n \leq a$.

VII. Suites et critères de convergences :

- ✓ Une suite est dite convergente si et seulement si elle admet une limite finie .
- ✓ Toute suite croissante et majorée elle est convergente.
- ✓ Toute suite décroissante et minorée elle est convergente.

VIII. Limites et ordres :

- ➢ $U_n < V_n$ $\forall n \in IN$ et $\lim U_n = +\infty$ alors $\lim V_n = +\infty$.
- ➢ $U_n < V_n$ $\forall n \in IN$ et $\lim V_n = -\infty$ alors $\lim U_n = -\infty$.
- ➢ $U_n < V_n < W_n$ $\forall n \in IN$ et $\lim U_n = \lim W_n = \ell$ alors $\lim V_n = \ell$.

Remarques importantes :

- ➢ Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
- ➢ Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- ➢ Si $U_n < a$ alors $\lim U_n = \ell \leq a$, Si $U_n > b$ alors $\lim U_n = \ell \geq b$.

(On parle toujours d'une limite en $+\infty$ de la suite en non pas ailleurs)