LS 9Avril Sfax ***Devoir de contrôle n°1 (4M)*** ***Mr Masmoudi etMr Driss***

Exercice n°1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a \in IR$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3}(u_n^2 - 2)$,pour tout n de IN .

I)1)Déterminer a pour que la suite (u_n) soit constante

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{1}{3}(x^2 - 2)$. Dresser le tableau des variations de f

II)On pose $u_0 = \frac{3}{2}$.

1)a) Montrer que ; pour tout n de IN, on a : $\sqrt{2} \le u_n \le \frac{3}{2}$.

b)Montrer que (u_n) est monotone , en déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

2)a) Etablir que ; pour tout n de IN, on a : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{3}(u_n - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2} - u_n)$

b) On pose $k = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Montrer que ; pour tout n de IN, on a : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \le k|u_n - \sqrt{2}|$

c) Montrer que ; pour tout n de IN, on a : $|u_n - \sqrt{2}| \le k^n\left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right|$

d) En déduire que (u_n) est convergente et retrouver sa limite

3) Pour tout n de IN* ; on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots\ldots + u_{n-1}^2$

Démontrer que : $S_n = -3u_n + 2n + \frac{9}{2}$. Et déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°2

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 2, soit F l'application P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') avec $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$

I) 1) Développer $(z-1)^3$,expprimer $z' - 1$ à l'aide de $z - 1$ et en déduire le module de $z' - 1$ à l'aide du module $|z-1|$ et l' argument de $z' - 1$ à l'aide de l'argument de $z - 1$ pour $z \neq 1$

2) Déterminer l'ensemble J des points invariants par F

II) 1) On considère un point quelconque M(z),distinct de A,et son image M'(z')

a) Donner une relation entre les mesures des angles $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})$ et une relation entre AM et AM'

b) Exprimer l'argument de $\frac{z'-1}{z-1}$ en fonction de l' argument de $z - 1$

c) Exprimer le module de $\frac{z'-1}{z-1}$ en fonction du module $|z-1|$

2) Déterminer l'ensemble E des points M(z) de P tels que A ; M et M' soient alignés

3) On considère (Q) le quart de cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ et dont les extrémités sont les points $C(1+\sqrt{2})$ et $D(1+i\sqrt{2})$

a)Calculer $|z' - 1|$

b)Lorsque M décrit (Q), donner un intervalle dont lequel varie θ' une mesure de $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})$

c)Représenter graphiquement l'ensemble (G) des points M' lorsque M décrit (Q)

Exercice n°3

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A d'affixe 1+i , B le point d'affixe 1 - i et le point C d'affixe 2. Soit T l'application de P - {O} dans P -{C} qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = 2 - \frac{2}{z}$

1) Montrer que A et B sont invariants par T

2) Soit M(z) de P - {O ;A ; B} et M'(z') son image par T

a)Montrer que : $\frac{z'-(1+i)}{z'-(1-i)} = -i\,\frac{z-(1+i)}{z-(1-i)}$

b)En déduire que : $\frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB}$ et $(\widehat{\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A}}) \equiv -\frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}})\,[2\pi]$

c)Montrer les équivalences :

(i) $M \in (AB) \Leftrightarrow M' \in \gamma - \{C\}$. avec γ le cercle de diamètre [AB]

(ii) $M \in (O,\vec{u}) - \{O\} \Leftrightarrow M' \in (O,\vec{u}) - \{C\}$.

3) a) Démontrer que l'ensemble Γ des points M(z) tels que $|z-(1-i)| = \sqrt{5}\,|z-(1+i)|$ est un cercle , préciser son centre et son rayon

b)Soit la suite de points (M_n) définie par : M_0 d'affixe i et $M_{n+1} = T(M_n)$;$\forall\, n \in \mathbb{N}$

Démontrer que tous les points de cette suite appartiennent à un même cercle