Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	05/11/2012
Niveau	4ème Maths1		Durée	2 h

Exercice 1 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & si\ \ x \in \ ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)} & si\ x\ \in [-1,1[\end{cases}$

1) Calculer la limite de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en -1
2) Calculer la limite de f à droite en 1
3) Sachant que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, déterminer $f(\,]-\infty, -1[\,)$ et $f(\,]1, +\infty[\,)$
4) Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
5) Monter que l'équation $f(x) = \frac{1}{\pi}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$
6) Soit h la restriction de f à $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $g = h \circ h$

   a- Déterminer l'ensemble de définition E de g

   b- Calculer les limites de g aux bornes de E

Exercice 2 : (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{2(\,i-\bar{z}\,)}{i+z}$; $z \neq -i$. On considère les points $B(-i)$, $C(i)$, $A(2)$ et $N(\bar{z}\,)$

On désigne par $\mathcal{C}_{(O,2)}$ le cercle de centre O et rayon 2

1) Montrer que $M' \in \mathcal{C}_{(O,2)}$.
2) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z' = 2$.

   b- En déduire l'ensemble des antécédents de A par f.
3) a- Montrer que $\frac{z'-2}{\bar{z}-i}$ est un réel.

   b- En déduire que les droites (AM') et (CN) sont parallèles.

   c- Expliquer comment construire M'connaissant M
4) La droite (AC) recoupe $\mathcal{C}_{(O,2)}$ en E. Montrer que $f\big((AB) \setminus \{B\}\big) = \{E\}$

Exercice 3 : (4 pts)

Soit l'équation(E_θ) : $z^2 + (2i\, sin\theta - 2)z - 2e^{i\theta} - 1 = 0$, $\theta \in]-\pi\,,\ \pi[$.

1) vérifier que $(2i\, sin\theta - 2)^2 + 8e^{i\theta} + 4 = (2cos\theta + 2)^2$
2) Résoudre alors (E_θ).
3) Soient les points $A(1)$, $M(-e^{i\theta})$ et $N(2 + e^{-i\theta})$

   a-Montrer que $Z_{\overrightarrow{AM}} = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $Z_{\overrightarrow{AN}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

   b- En déduire que le triangle AMN est isocèle en A.
4) Pour quelles valeurs de θ le triangle AMN est-il équilatéral ?

Exercice 4 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{8}{x+1}$.

et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq U_n \leq 7$
2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_{2n}$, $W_n = U_{2n+1}$.

   a- Montrer que la suite V est décroissante et que W est croissante.

   b- En déduire que les suites V et W sont convergentes.
3) On désigne par a et b les limites respectives des suites V est W

   a- Montrer que $a = 1 + \frac{8}{b+1}$ et que $b = 1 + \frac{8}{a+1}$

   b- En déduire que $a = b = 3$ et que la suite U converge vers 3.
4) a- Montrer que $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{3}|U_n - 3|$

   b- En déduire que $|U_n - 3| \leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

   c- Retrouver alors la limite de la suite U.

Bon travail.