L.S.Dar elamen

Mr :Nebti Khaled

Classe :4M1

Devoir de Contrôle N°1

Durée :2h

AS :12/13

Exercice N°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit z un nombre complexe de module 4, alors $\bar{z}$ le conjugué de z est égale à :

a) $\frac{4}{z}$ b) $\frac{16}{z}$ c) $\frac{2}{z}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{2x^2+1}-1)}{-3x}$ est égale à :

a) 0 b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{2}{3}$

3) si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{-1+\cos(u_n)}{2u_n}$ est égale à :

a) 0,5 b) 0 c) $-0{,}5$

Exercice N°2 : (5 pts)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique :3cm).

On désigne par A le point d'affixe $2i$. Et soit f l'application définie par $f: P\backslash\{A\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad telque: z' = \frac{z^2}{2i-z}$$

1) Déterminer les points invariants par f.

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' sont des réels. Montrer que : $x' = \frac{-x(x^2+y^2-4y)}{x^2+(2-y)^2}$.

En déduire l'ensemble E des points M dont M'est situé sur l'axe des ordonnées et la construire.

3) Trouver une relation entre les longueurs : OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M tels que M et M' sont situés sur un même cercle de centre O.

4) Dans cette question, on considère un point M d'affixe z situé sur le cercle de centre A et de rayon 1 et G le centre de gravité du triangle AMM'

a. Calculer l'affixe z_G du point G en fonction de z.

b. Montrer que G situé sur un cercle de centre O dont précisera le rayon. Et comparer les angles $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OG}}\right)$ et $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}})$.

c. Effectuer la construction du point G et en déduire celle de M'.

Exercice N°3 : (6 pts)

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta . z + 2 + 2\sin\theta = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on donne les points M_1 et M_2

d'affixe respectives $z_1 = i + e^{i\theta}$ et $z_2 = -i + e^{-i\theta}$.

a. Démontrer que OM_1M_2 est un triangle isocèle en O.

b. Vérifier que $S_{(O,\vec{u})}(M_1) = M_2$, ou $S_{(O,\vec{u})}$ désigne la symétrie orthogonal d'axe $(O, \vec{u})$

3) **a.** On désigne par I le milieu de segment$[M_1M_2]$déterminer l'ensemble des I quandθ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

b. Déterminer et construire l'ensemble des pointsM_1 quandθ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire l'ensemble des points M_2.

4) **a.** Soit B le point d'affixe $z_B = 2cos\theta$, Démontrer que OM_2BM_1 est un losange

b. Montrer que : $z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$.

c. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BM_2}; \overrightarrow{BM_1}}) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

d. Déterminer θ pour que : M_2BM_1est un triangle équilatéral.

<u>Exercice N°4 :</u> (6 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans l'annexe de la page n°3 , on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et les droites Δ et D d'équation respectives $y = x$ et $y = 4$.

$*$ la droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

$*$ la droite d'équation $y = 4$ est une asymptote a la courbe $\mathscr{C}$

1) Par lecture graphique répondre a ces questions :

a. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4-f(x)}$.

b. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une seule solution α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

c. En déduire le signe de f(x) suivant les valeurs de x

2) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

a. Déterminer D_h le domaine de définition de h

b. Déterminer les valeurs de x tel que : $h^2(x) - (1 + \sqrt{3})h(x) + \sqrt{3} = 0$.

3) On définit sur $\mathbb{N}$ la suite U par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $3 \le U_n$.

b. Montrer que (U_n) est décroissante, déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

<u>Annexe</u>