L.S.Jammel 3	Devoir de Contrôle 1	Afli Ahmed
07/11/2013	Durée :2h	4 Maths

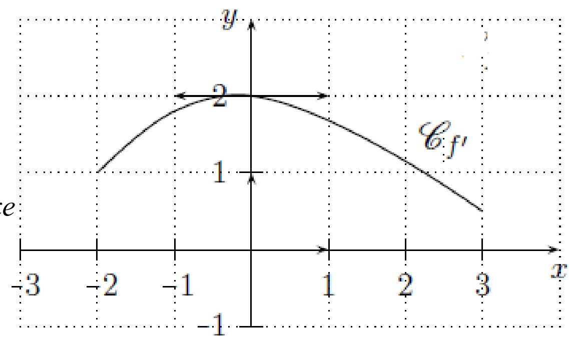
NB : Il sera tenu compte de la rédaction et la rigueur de raisonnement :☺

Exercice 1 :

Soit f une fonction deux fois dérivables sur [-2:3]

La courbe ci-contre est celle de f ' (fonction dérivée de f)

Répondre par ***Vrai*** *ou* ***Faux*** *en justifiant la réponse*



- 1./ $f(-1) < f(2)$
- 2./ La courbe (C_f) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses
- 3./ $|f(3) - f(-2)| \leq 10$
- 4./ f réalise une bijection de [-2,3] sur f([-2,3])

Exercice 2 :

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + Cos(U_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

1. / Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + cos(x)$ est croissante sur R .

2. / a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b. Etudier la monotonie de (U_n).

c. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. / a. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} cos(U_k) = U_{n+1}$

b. Calcule $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} cos(U_k)$

4. / x un réel donné,

Développer $(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^2$ puis déduire que $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{cos(x)+1}{2}$

5. / Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} cos^2(\frac{U_k}{2})$

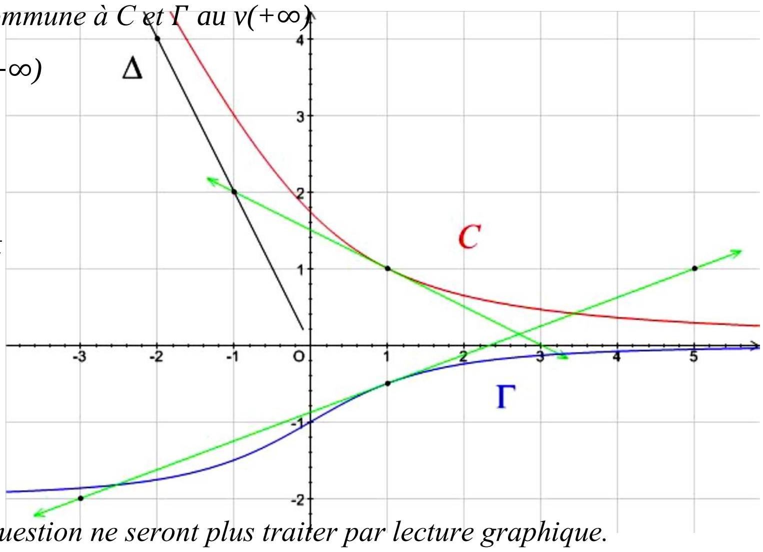
a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$

b. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nV_n$.

Exercice 3:

Dans la figure ci-contre :

- *C* est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction *f* ,
- *Γ* est la courbe de sa fonction dérivée .
- L'axe des abscisses est une asymptote commune à *C* et *Γ* au $v(+\infty)$
- La droite Δ est une asymptote à *C* au $v(-\infty)$



A.) Par <u>lecture graphique</u>, déterminer :

1./ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

2./ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f\circ f(x)}{f(x)}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x+1)$

3./ $f(1)$, $f'(1)$ et $f''(1)$

B.) On donne $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x$

N.B : Dans la suite de l'exercice toutes les question ne seront plus traiter par lecture graphique.

1. / a. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

b. Calculer $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ on a :

$$|f(x)-1| \leq \frac{3}{4}|x-1|$$

2. / Soit la fonction g continue sur [0,1] , dérivable sur]0,1[tel que : $g(0) = 1$ et $g(1) = \sqrt{3}$

a. Montrer qu'il existe au moins un réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = g(a)$

b. Monter qu'il existe au moins un réel $b \in]0,1[$ tel que $f'(b) = -g'(b)$

3. / On pose $u(x) = x.\sin(\frac{2}{x})$ et $v(x) = -\frac{1}{x^2} + \cos(\frac{1}{x})$

a. A l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 des fonctions u et v.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (u\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} (f\circ v)(x)$.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,on donne les points A(2i) et B(i)

Soit l'application $f\backslash\{B\}: P \to P$, tel que $z' = \frac{iz+2}{z-i}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

1. / Déterminer les points invariants par l'application *f* et exprimer leurs affixes sous forme algébrique et trigonométrique

2. / a. Montrer que pour tout $z \neq i$ et $z \neq 2i$, $|z'| = \frac{AM}{BM}$ et $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})[2\pi]$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(z) tel que $|z'| = 1$

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) lorsque M ' décrit la droite $(O,\vec{v})\backslash\{O\}$

3. / a. Calculer $(z'-i)(z-i)$ pour $z \neq i$

b. En déduire l'image, par *f*, du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$.

Avec mes encouragements