

Lycée Mahmoud Elmesaadi ELFAHS	DEVOIR DE CONTROLE N° 1	Prof : Ben HMIDENE. T	
A.S 2013-2014	MATHEMATIQUES	4math	Durée : 2h

Exercice n°1 (4points)

Répondre par vraie ou faux en justifiant

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}$

L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$f(-\infty, 1) =]0, 1[$

3) L'ensemble des points $M(z)$ tel que $\bar{z} = i + 2i e^{i\theta}$ est un cercle de centre $A(i)$ et de rayon 2

4) Soit $Z = \frac{iz}{z-2}$; si $z = 2e^{i\theta}$ alors Z est un réel

Exercice n°2 (5points)

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note I le point d'affixe $1 + i$, M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' .

Soit f l'application du plan complexe qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2iz + 3 - i$

1) Déterminer les affixes des points invariants par f .

2) Montrer que $\frac{z' - z_1}{z - z_1}$ est un imaginaire pur, et en déduire la nature du triangle IMM' .

3) a) Montrer que $2IM = IM'$

b) En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre I et de rayon 1

4) En prend $z = 2 + i$ déterminer l'affixe du point N tel que $IMNM'$ est un parallélogramme

Exercice n°3 (5points)

1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (2e^{i\theta} + i)z + ie^{i\theta} + e^{2i\theta} = 0$. $\theta \in [0, \pi]$

b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A

M et N d'affixes respectives : $i, e^{i\theta}$ et $i + e^{i\theta}$

a) Montrer que $OANM$ est un losange.

b) Pour quelle valeur de θ , $OANM$ est un carré?

3) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ décrit $[0, \pi]$

4a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 2(-1 - \sqrt{3}i)$

b) Ecrire les solutions sous forme cartésienne

Exercice n°4 (6points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans l'annexe ci-joint la courbe (Cf) est la représentation graphique d'une fonction définie sur $[0, +\infty[$

la courbe (Cf) passe par les points des coordonnées $A(1,0)$ et $B(a, -a)$

- (Cf) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point B .
- La droite (D) est la tangente à (Cf) au point A .
- (Cf) admet une demi tangente verticale au point O .
- (Cf) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$

1) Par lecture graphique.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

b) Déterminer $f'(a)$ et $f'(1)$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit $g(x) = \frac{-1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g\left(\frac{x}{f(x)}\right)$

3) Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ h(x) = g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Montrer que h est continue en 0

b) Etudier la dérivabilité de h à gauche en 0

4) Dresser le tableau de variation de h pour $x < 0$

5) Compléter la représentation graphique de h sur l'annexe.

ANNEXE A RENDRE :

Nom :

Prénom :



