Lycée Houmet Souk 1 Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Contrôle N : 1 Durée : 2 Heures	4 Mathématique 13 - 11 - 2014

EXERCICE N : 1 (3 points)

*Pour chaque proposition , indiquer si elle est **vraie** ou **fausse** en **justifiant la réponse** .*

1) *Deux isométries qui coïncident en trois points distincts deux à deux sont identiques .*

2) $A \neq B$, si f est un isométrie tel que $f([AB]) = [AB]$ alors f n'est pas une symétrie glissante .

3) $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ si et seulement si Δ et Δ' sont confondues .

EXERCICE N : 2 (5 points)

A) On considère la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\sin(x) - x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

2) a) Montrer que la droite $\Delta : y = -(x+1)$ est une asymptote à **(C f)** au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ et Interpréter graphiquement ce résultat .

c) Calculer $f \circ f(\pi)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ f(x)$.

3) Montrer que l'équation : $2f(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

B) Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) Justifier que g est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$ on a : $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

b) Déduire que g est continue à gauche de 0 .

EXERCICE N : 3 (6 points)

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$

On pose , pour tout $n \in IN$, $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

1) *Montrer que pour tout* $n \in IN$ *on a :* $2 \leq U_n < 3$.

2) a) *Déterminer le sens de variation de la fonction* f *définie sur* $]0 ; +\infty[$ *par :* $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$.

b) *Montrer que pour tout* $n \in IN$, $V_{n+1} = 2 + \dfrac{V_n}{2V_n + 1}$ et $W_{n+1} = 2 + \dfrac{W_n}{2W_n + 1}$.

c) *Montrer que pour tout* $n \in IN$, $V_n < W_n$.

3) *Montrer , par récurrence que , la suite* (V_n) *est croissante et que* (W_n) *est décroissante sur IN* .

4) a) *Montrer que pour tout* $n \in IN$, $W_{n+1} - V_{n+1} \leq \dfrac{1}{25}(W_n - V_n)$.

b) *Déduire que pour tout* $n \in IN$, $W_n - V_n \leq \dfrac{1}{2.(25)^n}$.

5) a) *Justifier que les suites* (V_n) *et* (W_n) *sont adjacentes* .

b) *Déduire que la suite* (U_n) *est convergente et calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N : 4 (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f *définie sur* $\mathbb{C}^*$ *par :* $f(Z) = \dfrac{1-i}{2} Z + \dfrac{1+i}{Z}$.

On désigne par M le point d'affixe Z et par M' le point d'affixe f (Z) .

1) a) *Montrer que :* $f(Z)$ *est un réel* $\Leftrightarrow (Z\bar{Z} - 2)[Re(Z) - Im(Z)] = 0$

b) *Déduire l'ensemble* **(Γ)** *des points* M *tels que :* $f(Z)$ *est réel* .

2) *Déterminer l'ensemble* **(Γ')** *des points M tels que :* M , M' *et* $N_{\left(\frac{1-i}{2}Z\right)}$ *soient alignés* .

3) *Dans cette question , on pose :* $Z = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in IR$.

a) *Montrer que :* $f(Z) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$.

b) *Déduire que si* M *est un point du cercle* **(C)** *de centre O et de rayon 1 alors* M'

appartient a' l'ensemble d'équation cartésienne : $2x^2 + 18y^2 = 9$.

4) *On considère dans* $\mathbb{C}^*$ *l'équation* **(E) :** $Z^2 f(Z) = (1+i)Z + 2i$.

a) *Montrer que l'équation* **(E)** *est équivalente dans* $\mathbb{C}^*$ *à l'équation* **(E') :** $Z^3 + 2 - 2i = 0$.

b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* **(E')** *et donner les solutions sous forme exponentielle* .

c) *Vérifier que* $(1+i)$ *est une solution de* **(E')** *puis déduire les valeurs de* $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

Bon travail.