

<i>L. Regueb</i>	<i>Mathématiques</i>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup> M</i>
<i>Prof : Salhi Noureddine</i>	<i>Devoir de Contrôle N°1</i>	<i>Le:10/11/2016 D:2h</i>

### Exercice1(5pts)

On donne dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E):  $z^2 - e^{i\theta}z + i \sin(\theta) \cos(\theta) = 0$

et le polynôme :  $P(z) = z^4 - e^{i\theta}z^2 + i \sin(\theta) \cos(\theta)$  ; où  $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

1) Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes :  $i$  ;  $\sin(\theta)$  et  $\cos(\theta)$  .

2)a) Vérifier que  $z_1 = \cos(\theta)$  est une solution de l'équation (E) .

b) En déduire l'autre solution  $z_2$  de (E) .

3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  .

### Exercice2(7pts)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$  par  $f(z) = i \left( \frac{z-2i}{z-i} \right)$ .

Les points M , A et B sont d'affixes respectives z , 2i et i .

1)a) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$  on a :  $|f(z)| = \frac{AM}{BM}$  .

b) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$  on a :  $\arg(f(z)) \equiv \left( \widehat{BM, AM} \right) + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$  .

2) Déterminer les deux ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \in P / |f(z)| = 1\} \quad \text{et} \quad F = \{M(z) \in P / f(z) \in i\mathbb{R}\}$$

3) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$  on a :  $|f(z) - i| = \frac{1}{|z-i|}$  et  $\arg(f(z) - i) \equiv -\arg(z - i) \pmod{2\pi}$

4)a) Montrer que si M est un point du cercle  $(\Gamma)$  de centre B et de rayon  $\frac{1}{2}$  alors le point M' d'affixe f(z) appartient à un cercle que l'on précisera .

b) On prend un point M de  $(\Gamma)$  , construire alors en justifiant le point M' à partir du point M .

### Exercice 3 (8pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2} + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal .

1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition et préciser les asymptotes Verticales et horizontales .

2)a) Montrer que la courbe  $(C_f)$  admet la droite d'équation  $y = x - 1$  comme asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  .

b) En déduire les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ f)(x)}{f(x)}$  .

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$  .

3) Soit la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$  et  $h = g \circ f$  .

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $h$  .

b) Montrer que  $h$  est prolongeable par continuité en 2 .