Lycée Houmet Souk Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Contrôle N : 1 Durée : 2 Heures	4 Mathématique 1 06 - 11 - 2018

EXERCICE N : 1 (5 points)

A) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = 1$, $Z_B = 2$ et $Z_C = 3$.

Soit $f : P \setminus \{ B \} \to P$; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \dfrac{\overline{Z} - 3}{\overline{Z} - 2}$.

1) a) Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points M tels que $|Z'| = 1$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble (Γ') des points M tels que Z' est imaginaire .

2) a) Vérifier que pour tout $Z \neq 2$ on a : $Z' - 1 = \dfrac{-1}{\overline{Z} - 2}$.

b) En déduire que pour tout $M \neq B$, on a **:** $AM' . BM = 1$ et $(\widehat{\overrightarrow{BM} , \overrightarrow{AM'}}) \equiv \pi (2\pi)$.

c) Construire le point M' lorsque M est un point du cercle **($\mathcal{C}$)** de centre B et de rayon 1 **.**

3) Dans cette question le point M appartient au cercle **($\mathcal{C}'$)** de centre C et de rayon 1 .

a) Montrer qu'il existe un réel $\theta \in] -\pi ; \pi [$ tel que : $Z = 3 + e^{i\theta}$

b) Ecrire $Z' - 1$ sous forme exponentielle .

c) Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \dfrac{1}{2}$.

d) Connaissons le point M , construire le point M' .

EXERCICE N : 2 (5 points)

I) Soit l'équation **(E_θ)** : $Z^2 - \frac{1}{2} (1 + 3 i) e^{i\theta} Z - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in IR$.

1) Vérifier que $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i)^2 = 2 + \frac{3}{2} i$.

2) Résoudre alors dans £ l'équation **(E_θ)** .

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$ et $\theta \in IR$.

On donne les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = (1 + i) e^{i\theta}$ et $Z_B = \frac{1}{2} (-1 + i) e^{i\theta}$.

1) Donner la forme exponentielle de Z_A et Z_B .

2) Déterminer la nature du triangle OAB .

III) On désigne par **($\mathcal{C}$)** le cercle de centre O et de rayon 1 et $\theta \in IR$.

Soit $f :$ **($\mathcal{C}$)** $\to IR$; $M_{(e^{i2\theta})} \mapsto f (M) = MA \times MB$

1) Montrer que pour tout $\theta \in IR$, on a : $e^{i2\theta} - 1 = 2 i \sin\theta \, e^{i\theta}$.

2) a) Montrer que : $f (M) = | e^{i2\theta} - 1 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i) e^{i\theta} |$.

b) *En déduire que* : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + (-\frac{3}{2} + 2\sin\theta)^2}$.

c) *Déterminer les coordonnées des points de* $(\mathscr{C})$ *pour lesquels* f *atteint son minimum* .

EXERCICE N : 3 (10 points)

I) Soit la fonction f *définie sur* $]-1, 1[$ *par :* $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) *Dresser le tableau de variations de* f .

b) *Montrer que* f *réalise un bijection de* $]-1 ; 1[$ *sur IR* .

c) *Démontrer que pour tout* $x \in IR$ *on a :* $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$.

2) a) *Etudier les variations de la fonction* ψ *dé finie sur* $]-1 ; 1[$ *par :* $\psi(x) = f(x) - x$.

b) *Montrer que l'équation :* $\psi(x) = 0$ *admet dans* $]-1 ; 1[$ *une unique solution* $\alpha \in]0 ; 1[$.

c) *Déduire le signe de* $\psi(x)$ *pour tout* $x \in]-1 ; 1[$.

II) Soit (U_n) *la suite réelle définie sur IN par :* $U_0 \in [0, \alpha]$ *et* $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.

1) *Montrer que pour tout* $n \in IN$ *on a :* $U_n \in [0, \alpha]$.

2) a) *Montrer que pour tout* $x \in [0, \alpha]$ *on a :* $f^{-1}(x) \geq x$.

b) *Montrer alors que la suite* (U_n) *est monotone* .

c) *Déduire que la suite* (U_n) *est convergente et donner sa limite* .

3) *Pour tout* $x \in]-1 ; 1[$, *on pose :* $h(x) = f(\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)])$.

a) *Montrer que pour tout* $x \in]-1 ; 1[$ *on a :* $h(x) = -1 + \text{cotan}[\frac{\pi}{2}(x+1)]$.

b) *Montrer que h admet une réciproque* h^{-1} *définie sur IR* .

c) *Montrer que* h^{-1} *est dérivable sur IR et que* $(h^{-1})'(x) = \dfrac{-2}{\pi((x+1)^2+1)}$.

III) Pour tout $x \in IR^*$, *on pose* $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\frac{1}{x} - 1)$.

1) *Montrer que H est dérivable sur IR* et pour tout* $x \in IR^*$, $H'(x) = 0$.

2) a) *Calculer* $h(-\frac{1}{2})$, $h(\frac{1}{2})$, $H(-1)$ *et* $H(1)$.

b) *En déduire que pour tout* $x \in]-\infty; 0[$, $H(x) = 1$ *et pour tout* $x \in]0 ; +\infty[$, $H(x) = -1$.

3) *Pour tout* $n \in IN^*$, *on pose :* $V_n = \sum_{k=1}^{n} [h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k})]$.

a) *Montrer que pour tout* $k \in IN^*$ *on a :* $h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k+1}) = -1$.

b) *Déduire que pour tout* $n \in IN^*$ *on a :* $V_n = -n - h^{-1}(-\frac{1}{n+1})$.

c) *Déterminer alors* $\lim_{n \to +\infty} V_n$.