Année scolaire : 17/18	*Devoir de maison*	Niveau : $4^{\text{éme}}$ math

Exercice n°1 :

Le tableau suivant indique l'évolution de la population (en milliers) dans le gouvernorat de l'Ariana de l'année 2001 jusqu'à l'année 2009.

L'année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Population Y	151.1	164.9	178.1	183.7	185.7	186.3	189.7	191.3	193.9

1) *Déterminer le coefficient de corrélation $r(X, Y)$, un ajustement affine est-il vérifié ? justifier.*
2) *Déterminer la droite de régression de Y en X.*
3) *Utiliser cet ajustement pour estimer la population de ce gouvernorat dans l'année 2015.*
4) *On pose $Z = \ln X$.*
   a) *Déterminer le coefficient de corrélation $r\ (Z, X)$.interpréter.*
   b) *Donner la droite de régression de Y en Z.*
   c) *Déduire un autre ajustement de Y en X.*
   d) *Donner alors une prévision de cette population en 2015.conclure alors.*

Exercice n°2 :

Une personne fabrique des appareils électroniques .Elle achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0.02.

Partie A :

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composantes soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, en on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

Une personne achète 50 composants.

1-qu'elle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} prés.

2-Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux. Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} prés.

3-quel est l'espérance de X ? Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux.

Partie B : *On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5.10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.*

1-calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures.

a-si ce composant est défectueux.

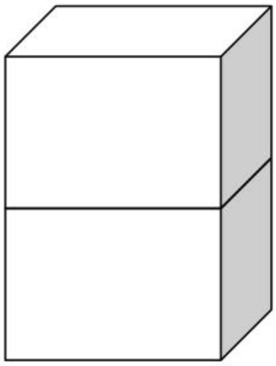
b-si ce composant n'est pas défectueux. (Donner une valeur approchée à 10^{-2} prés).

2-soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard. Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est $p(T \geq t) = 0.02e^{-5\times10^{-4}t} + 0.98e^{-10^{-4}t}$.

3-sachant que le composé acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux.

Exercice n°3 :

Soit ABCDEFGH et E' F'G'HABCD sont deux cubes isométriques. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) a) Donner les coordonnées des points F' et G'.

b) Déterminer $\overrightarrow{AF'} \wedge \overrightarrow{AG'}$. *En déduire une équation du plan (AF'G').*

2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tel que : $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. *Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.*

b) Déterminer $S \cap (AF'G')$.

c) Montrer que le volume de du cône de révolution de base ξ et sommet C est égale à : $\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$.

3) Soit a un réel de $]0,\frac{1}{2}[$ *. On désigne par M et N les points définies par :* $\overrightarrow{AM} = 2a\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CN} = a\overrightarrow{CD}$, *et par Q le point de coordonnées (0,0,b), ou b un réel non nul.*

a) Montrer que $\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MQ} = b\overrightarrow{AB} + (3a-1)b\,\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire les valeurs de a et b pour que les plans (MNQ) et (AF'G') sont parallèles.

4) Dans la suite on prend $a = \frac{1}{3}$ *et* $b = \frac{2}{3}$. *Soit h l'homothétie de centre E' qui transforme A en Q. La droite (QM) coupe (E'F') en F''.*

a) Montrer que $h(F') = F''$.

b) La droite (E'M) coupe le plan (AF'G') en M'. Montrer que M', A et F' sont alignés.

Exercice n°4 :

On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ *est l'unique fonction φ dérivable sur IR telle que* $\varphi' = \varphi$ *et* $\varphi(0) = 1$. *On suppose un réel a.*

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{ax}$ *est une solution de l'équation différentielle* $y' = ay$.

2) *on considère une fonction solution de l'équation différentielle* $y' = ay$. *et on note h la fonction définie sur IR par :* $h(x) = g(x).e^{-ax}$. *Montrer que h est constante.*

3) *En déduire l'ensemble des solutions de* $y' = ay$.

4) *on considère l'équation différentielle (E) :* $y' = 2y + \cos x$.

a) Déterminer les réels a et b pour que l'équation f_0 *définie sur IR par* $f_0 = a\cos x + b\sin x$ *soit solution de (E).*

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c) montrer que si f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ *est une solution de* (E_0).

d) En déduire les solutions de (E).

e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 0$.

<u>Exercice n°5 :</u>

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}$ *et soit* ξ_f *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1-a- Dresser le tableau de variation de f.

b-Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

c-Tracer les courbes ξ_f *et* ξ_f^{-1}.

d-montrer que pour tout $x \in J$, *on a :* $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$.

2-a-montrer que l'équation $f(x) = x$ *admet dans* $]0;+\infty[$ *une unique solution notée* α.

b- On pose $I = \int_\alpha^1 f^{-1}(x)dx$. *en utilisant une intégration par partie, montrer que :*
$\int_\alpha^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2(I + \alpha^2) - \ln(\sqrt{2})$.

3-Soit h une fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $h(x) = \frac{1}{4}\ln\left(1 + tan^2(x)\right)$.

a-étudier les variations de h sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b-Montrer que h^{-1} *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et que pour tout* $x\in\ ]0;+\infty[$ *on a :*
$(h^{-1})'(x) = 2f(x)$.
a- Soit $\mathcal{A}$ *l'aire de la partie du plan limité par* ξ_f *, l'axe des abscisses et les droites*

d'équations $x = \sqrt{\sqrt{2}}$ *et* $x = \sqrt{2}$; *montrer que* $\mathcal{A} = \frac{\pi}{24}$ $(u.a)$.

$4 - a -$ *pour tout* $n \in IN^*$, *on pose :* $U_n = \int_1^{\ln(\sqrt{2})} \frac{dx}{\sqrt{e^{4nx}-1}}$. *Montrer que la suite* U_n *est croissante puis déduire qu'elle converge.*

b-montrer que pour tout $n \in IN^*, U_n \geq \frac{-1}{\sqrt{4^n - 1}}$; *puis déduire* $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

<u>Exercice n°6 :</u>

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On code tout nombre entier x *compris entre* 0 *et* 25 *de la facon suivante*:

$-$*on calcule* $11x + 8$, *puis on calcule le reste de la division euclidienne de* $11x + 8$ *par* 26, *que l'on appelle* y *donc* x *est alors codé par* y.

$1 -$ *Coder la lettre* W, L, R *et* F.

$2 -$ *le but de cette question est de déterminer la fonction du décodage .*

$a -$ *montrer que pour tous les nombres relatifs* x *et* j, *on a* : $11x \equiv j (mod\ 26)$ *équivaut à* $x \equiv 19j (mod\ 26)$.

$b -$ *En déduire un procédé de décodage puis décoder les lettres* : W, L, R *et* F.