Devoir de maison N◦1

SAIDANI MOEZ
4 MATHS 2014/2015

EXERCICE N°1

1. Soit la fonction :$x \overset{\tan}{\mapsto} \tan x$.
   (a) Montrer que la fonction tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) On note h la réciproque de tan ,montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $h^{'}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. On considère f la fonction définie par:$\begin{cases} f(x) & = -x+\sqrt{x^2+1} \quad & x \geq 0 \\ f(x) & = \frac{4}{\pi}h(-x+\sqrt{x^2+1}) \quad & x < 0 \end{cases}$
   (a) i. Montrer que f est continue en 0
   ii. Etudier la dérivabilité de f en 0
   i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* f'(x) < 0$
   ii. Donner le tableau de variation de f et les limites en $+\infty$ et $-\infty$
   (b) Construire C_f
   (c) Soit $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .Montrer que $f(I) = I$
3. On considère la suite (U_n) définie par:$\begin{cases} U_0 & = 1 \\ U_{n+1} & = f(U_n);\ n \geq 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que $\forall \in I \quad |f'(x)| < \frac{4}{5}$
   (b) En utilisant le théoreme des accroissements finis,montrer que $\forall \in \mathbb{N}^*$;$\left|U_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| < \frac{4}{5}\left|U_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$
   (c) Déduire que la suite U et convergente et calculer sa limite.
   (d) Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ f(\frac{1}{\tan x}) = \tan(\frac{x}{2})$
   (e) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$
   i. Vérifier que $a_0 = 1; \forall \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$
   ii. $\forall \in \mathbb{N}$; $U_n = \tan(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}})$

EXERCICE N°2

Dans la figure ci-dessous;on considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit ξ le cercle de diamètre $[AB]$.
Soit R la rotation de centrer A qui transforme B en C.
Soit ξ' l'image de ξ par R.On désigne par O le centre ξ et O' celui de ξ'.

1. (a) Construire ξ'. Soit I le second point d'intersection de ξ et ξ' autre que A.

(b) Montrer que $I = B * C$ et préciser la nature du quadrillatère $IOAO'$.

2. Soit f une isométrei qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

   (a) Montrer que $f(A) = A$ et $f(I) = I$

   (b) En déduire toute les isométries qui laissent glabalement invariant ABC.

3. Soient $r_1 = R_{(O,\frac{\pi}{2})}; r_2 = R_{(O',\frac{\pi}{2})}, g = r_2 \circ r_1$ et $h = r_2^{-1} \circ r_1$

   (a) Préciser $g(B)$ et $h(B)$

   (b) Soit M un point du plan tel que $r_1^{-1}(M) = M_2$ et $r_2^{-1}(M) = M_2$.Montrer a l'aide de h que l'on caractérisera que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{BA}$.

EXERCICE N°3

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i \sin\theta e^{i\theta} = 0$

1. (a) Montrer que $1 + 2i \sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2. On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - 2i \sin\theta e^{i\theta})z + 4i \sin\theta e^{i\theta}$.

   (a) Calculer $f(2)$

   (b) Montrer que $f(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$où b et c deux nombres complexes à déterminer.

   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3. le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. on désigne par A, B,et C les points d'affixes :$2, 1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

   (a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C.

   (b) Montrer que $OABC$ est un rectangle.

   (c) Déterminer θ pour que $OABC$ soit un carré.

sujet traité par LATEX