

❖❖❖  
**DEVOIR DE SYNTHESE N° 1**

**Exercice 1 : ( 3 points)**

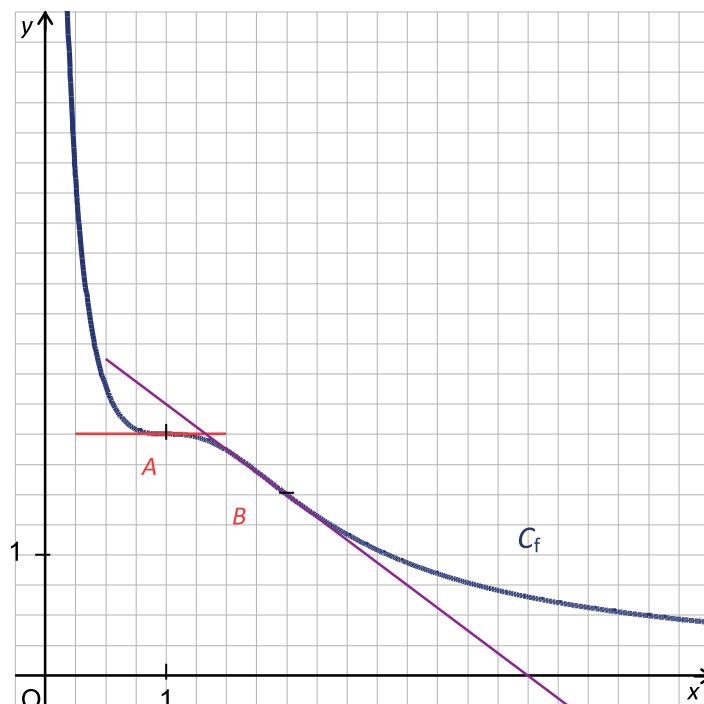
Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une et une seulement est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ . On suppose que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .
  - La fonction  $g$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$  admet un extremum local sur  $]0, 1[$  ;
  - La fonction  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$  ;
  - Pour tout  $c$  appartenant à  $]0, 1[$ , on a :  $f'(c) \neq 1$
- On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ 
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ;
  - $(u_{2n})$  est une suite croissante ;
  - les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont adjacentes .
- Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée  $C_f$  d'une fonction dérivable et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ . On sait que :
  - Les droites d'équation respectives  $x = 0$  et  $y = 0$  sont asymptotes à la courbe  $C_f$  ;
  - la courbe  $C_f$  admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point  $A$  d'abscisse 1 ;
  - la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $B\left(2; \frac{3}{2}\right)$  passe par le point de coordonnées  $(4; 0)$

- La courbe représentative de la fonction réciproque  $f^{-1}$  admet deux points d'inflexion.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0$  ;

- $f^{-1}$  est dérivable en  $\frac{3}{2}$   
 et  $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$



**Exercice 2 : (6 points)**

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 5x - 1$ .
  - Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Montrer que l'équation  $x^3 + 5x = 1$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Etablir que  $0 < \alpha < \frac{1}{5}$ .
- Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on considère l'équation  $(E_n): x^3 + 5x = n$ .
  - Justifier que pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation  $(E_n)$  admet une et une seule solution  $\alpha_n$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Déterminer la monotonie de la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ .
  - Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\alpha \leq \alpha_n \leq \sqrt[3]{n}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$ .
  - Justifier que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$ .
- On pose  $(F_0): 5x = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère l'équation  $(F_n): x^n + 5x = 1$ .
  - Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $(F_n)$  admet une et une seule solution  $\beta_n$  dans  $[0, +\infty[$ .
  - Calculer  $\beta_0, \beta_1$  et  $\beta_2$ . Démontrer que pour tout entier  $n$ ,  $0 < \beta_n \leq \frac{1}{5}$ .  
En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n)^n$ .
  - En utilisant l'équation satisfaite par  $\beta_n$ , déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ .

**Exercice 3 : (5 points)**

Soit  $ABC$  un triangle isocèle et rectangle tel que  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et soit  $O$  le milieu de  $[AC]$ .

On désigne par  $I$  le milieu de  $[OB]$  et par  $D$  le symétrique de  $O$  par rapport à  $(BC)$ . Soit  $J$  le point d'intersection des droites  $(AD)$  et  $(BC)$ .

- Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  tel que  $f(A) = C$  et  $f(O) = D$ .
  - Montrer que  $f$  est la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .
  - Soit  $K = f(I)$ . Montrer que  $K$  est le milieu de  $[BD]$  et en déduire que les points  $O, J$  et  $K$  sont alignés.
- On pose  $g = S_{(BO)}$ .
  - Déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$ .
  - En déduire que  $f^{-1} = S_{(AB)}$ .

3. On pose  $h = S_{(OD)} \circ \quad$ . On désigne par  $(\Delta)$  la médiatrice du segment  $[BD]$ .  
Montrer que  $h$  est la symétrie glissante d'axe  $(\Delta)$  et de vecteur  $\vec{BO}$ .
4. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $h(M) = f^{-1}(M)$ .
5. Caractériser l'application  $S_{(BO)} \circ \quad$ .

#### Exercice 4 : ( 6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 3 cm.

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\theta) : z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1 = 0$ , où  $\theta$  est un réel de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

1. a) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $(E_\theta)$ .  
On mettra les solutions  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle où  $z_1$  est celle dont la partie imaginaire est négative.
- b) On désigne par  $M_1, M_2$  et  $M_3$  les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $z_3 = i$ .  
Déterminer la valeur de  $\theta$  pour laquelle  $OM_1M_2M_3$  soit un parallélogramme.
- c) Faire une figure pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

Dans tout ce qui suit, on prend :  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

2. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\vec{w}$  d'affixe  $(-\sqrt{3} + i)$ .  
Calculer l'affixe  $z_4$  du point  $M_4 = t(M_1)$  puis placer le point  $M_4$ .
3. Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$ .  
Calculer l'affixe  $z_5$  du point  $M_5 = r(M_1)$  puis placer le point  $M_5$ .
4. On désigne par  $z_6$  l'affixe du point  $M_6$  le symétrique de  $M_3$  par rapport à  $O$ .  
Montrer que les racines sixièmes de  $(-1)$  sont  $z_k$ , avec  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
5. Ecrire le polynôme  $z^6 + 1$  sous forme de produit de trois polynômes de second degré à coefficients réels.