

L.S. Avenue de la liberté	Devoir de synthèse N°1	Prof : Gharbi Chaouki
** Jendouba **		Epreuve: Mathématiques
Date : 08/12/2009	Classe: 4 ^{ème} Math	Durée :3 heures

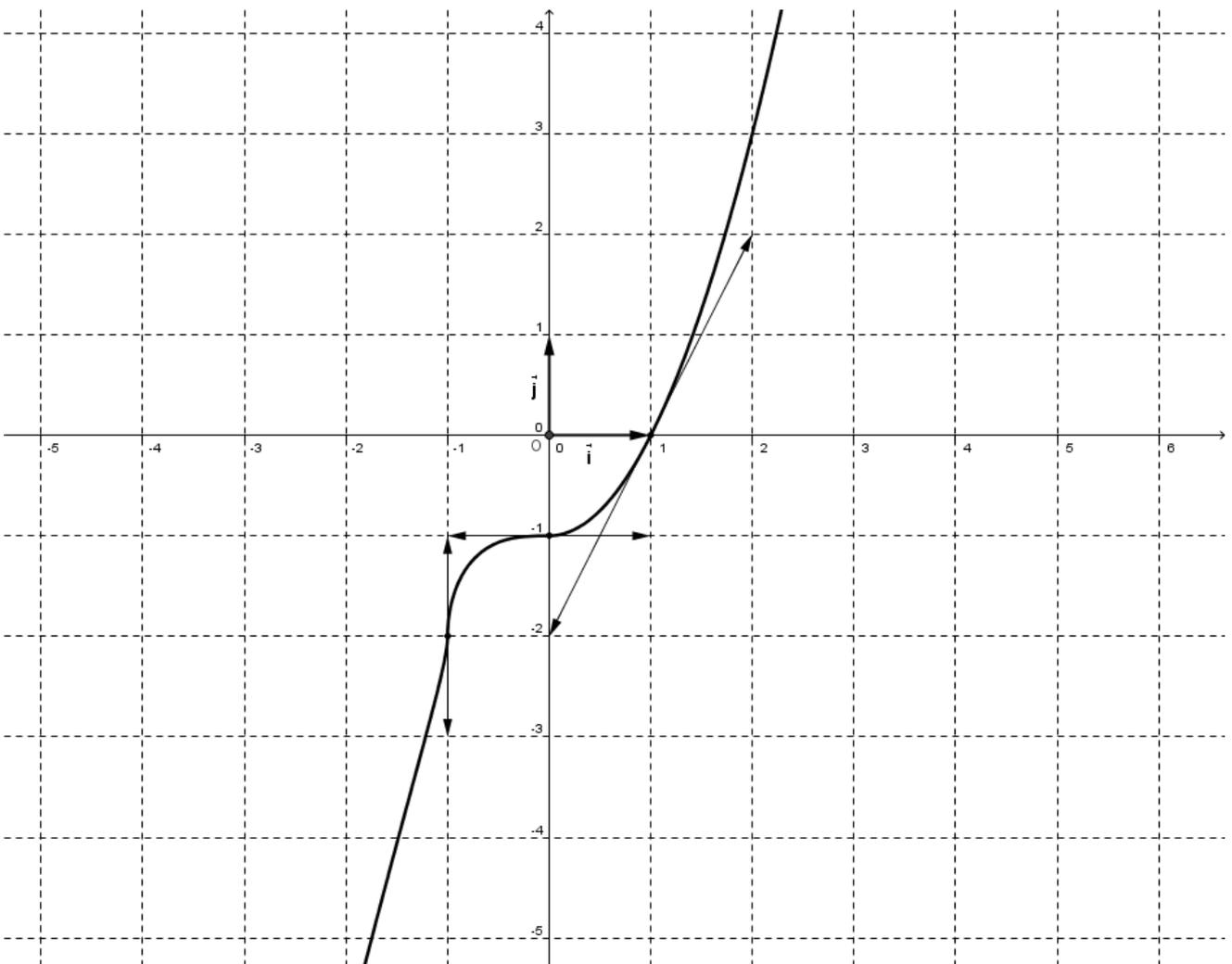
Exercice1 : (3 points)

Répondre par vrai ou faux

- Soit z un nombre complexe non nul. Si z^3 est un réel alors z est réel
- Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et de même module, alors $z = z'$ ou $z = -z'$
- L'ensemble des points M d'affixe z dans le plan complexe tel que $\frac{iz+1}{z-1} \in \mathbb{R}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privée de $\{A,B\}$ où $A(1)$ et $B(i)$
- L'écriture exponentielle de $\frac{i}{1+i \tan \theta}$; $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ est $\cos \theta e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

Exercice 2 : (3 points)

Le graphique ci-dessous, représente une fonction f définie sur \mathbb{R} dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})



- 1) a) f est-elle dérivable en (-1)
 - b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x)+2}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x)+2}{x+1}$
- 2) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle K que l'on précisera
- 3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable en (-2)
 - b) f^{-1} est-elle dérivable en 0? Pourquoi ?
 - c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}
 - d) Calculer $(f^{-1})'(-2)$; $(f^{-1})'(0)$

Exercice 3: (6 points)

Soit la fonction f définie sur $] - 1; 1[$ par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) a) Dresser le tableau des variations de f .
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] - 1, 1[$ une solution unique α et que $\alpha \in] \frac{4}{5}, 1[$.
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $] - 1, 1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
 - b) Construire \mathcal{C} et \mathcal{C}' la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})
 - c) Démontrer que $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$ pour tout $x \in K$
- 3) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0, \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0, \alpha]$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in [0, \alpha]$ on a $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
 - c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$
 - d) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
- 4) Pour tout x de $] - 1, 1[$; on pose $h(x) = f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\right]$
 - a) Montrer que : pour tout $x \in] - 1, 1[$ on a $h(x) = -1 + \cotan\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$
 - b) Montrer que h réalise une bijection de $] - 1, 1[$ sur \mathbb{R}
 - c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et que : $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi[(x+1)^2+1]}$

Exercice4 : (4 points)

1) On rappelle que 2003 est un nombre premier.

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $123x + 2003y = 1$

- a) Trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E)
- b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
- c) Déterminer un entier k tel que $123k \equiv 1 \pmod{2003}$
- d) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $123x \equiv 456 \pmod{2003}$

2) Pour fêter l'anniversaire de l'un de ses collègues de travail un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 50 dinars. Les hommes ont dépensé 5 dinars chacun et les femmes 3 dinars chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice5: (4 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct $ABCD$ de centre O tel que : $AB = 2AD$

On pose $I = A * B$ et $J = C * D$

Soit f une isométrie sans point fixe et qui envoie A en C et I en J

- 1) a) Montrer que f est une symétrie glissante
b) Montrer que $f(B) = D$
- 2) Soit $E = f(C)$
 - a) Montrer que: $\widehat{CDE} = \frac{\pi}{2}$
 - b) En déduire que $D = A * E$
- 3) Soit A' le symétrique de A par rapport à B . On pose : $g = t_{\overline{BD}} \circ S_{(BC)}$
 - a) Déterminer $g(B)$; $g(C)$ et $g(A)$
 - b) En déduire que $f = g$
 - c) A l'aide d'une décomposition adéquate de $t_{\overline{BA}}$ en deux symétries orthogonales, déterminer les éléments caractéristiques de f
- 4) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABE



Bon Travail