Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2009 - 2010
Épreuve : Mathématiques	Devoir de Synthèse n° 1	Durée : 3h
Prof : MAATALLAH	Le 8 - 12 - 2009	Classe : 4 M

EXERCICE N1(5 points)

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$ on considère un carré OABC de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.Soit E le point de [OA] distinct de O et de A . La parallèle à la droite (OC) passant par E coupe [BC] en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe [AB] en N .

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie C sur B et M sur N .

2/ Montrer que f est une rotation . Montrer que f(B)=A . En déduire le centre de f.

3/ Montrer que $f \circ S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ qu'on déterminera .

4/ Montrer que $S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)}$ est une translation et déterminer son vecteur .

5/ Soit g l'antidéplacement qui envoie C sur B et M sur N .
Montrer que g(B)=A . En déduire que g est une symétrie glissante . Déterminer l'axe et le vecteur de g .

6/ Montrer que $f \circ g$ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques .

EXERCICE N° 2(5 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On considère la fonction f_θ définie par :$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{e^{i\theta}\}$, $f_\theta(z) = z' = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}$

1/ Vérifier que si $\theta \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ alors f_θ est une fonction constante.

2/ On suppose que $\theta = 0$.

a- Montrer que $\forall z' \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ il existe un unique $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ tel que $f_0(z) = z'$ et vérifier que $z = -f_0(-z')$.

b- Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ona $f_0(e^{i\alpha}) = i\cot g(\frac{\alpha}{2})$

c- Utiliser les questions précédentes pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$

3/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé directe $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A ,B , M , M' d'affixes respectives $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}$, z et $z' = f_\theta(z)$. On suppose que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq -\frac{\pi}{2}$

a- Montrer que z est imaginaire si et seulement si $|z'| = 1$.

b- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. Déterminer l'ensemble des points M lorsque le point M' décrit la demi-droite : $y = x, x > 0$

EXERCICE N 3(4 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par : $f(x) = 1 + 3\cos^2 x$

1/ Montrer que f *réalise une bijection de* I *sur* [1,4].

2/ a- Vérifier que $f^{-1}\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *et calculer* $f^{-1}\left(\frac{13}{4}\right)$.

b-Tracer dans un même repère orthonormé la courbe C_f *de* f *et la courbe* $C_{f^{-1}}$ *de* f^{-1} .

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,4[$ *et que* $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(4-x)(x-1)}}$

4/ a- Montrer que $\forall x \in [\frac{7}{4}, \frac{13}{4}]$, *on a* : $\frac{2}{9} \leq (f^{-1})'(x) \leq \frac{2}{3}$.

b-Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ *admet dans l'intervalle* $]\frac{7}{4}, \frac{13}{4}[$ *une solution unique* α .

c-Montrer que si $\alpha \leq x \leq \frac{13}{4}$ *alors* $\frac{1}{9}(2x + 7\alpha) \leq f^{-1}(x) \leq \frac{1}{3}(2x + \alpha)$.

EXERCICE N (6 points)

1/ A l'aide de graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to -4^-}\left[\frac{f(x)+3}{x+4}\right]$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\frac{f(x)-3}{x+1}\right]$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$

2/ C_f admet un élément de symétrie. Dresser le tableau de variation de f sur un domaine d'étude .

3/ On admet que f est infiniment dérivable sur [4,6].
Montrer que f ''(x)=0 admet une solution α sur [4,6] .

4/ On admet que $\forall x \in [3,4] : 2 \leq f'(x) \leq 3$.

a- Montrer que $\forall x \in [3,4]$: $3x - 9 \leq f(x) \leq 2x - 5$.

b- Soit h la fonction définie sur [3,4] par : $h(x) = f(x) - 2x + 9$.
Etudier les variations de h . Vérifier que 4 est l'unique solution de l'équation h(x)=x

c- Soit la suite W définie par : $W_0 = 3$ et $W_{n+1} = h(W_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Etudier la monotonie de v sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Résoudre dans $[0,\frac{\pi}{2}]$: $v'(x) = 0$ .Calculer $v'(\frac{\pi}{2})$.

iii) Dresser le tableau de variation de v . Construire la partie de C_v sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans un repère orthogonal.

6/ a- Montrer que f admet des primitives sur$[-1,1]$.

b-Soit F la primitive de $f_{/[-1,1]}$ égale à 0 en 0 .

i) Donner F'(-1) ,F'(0) , F'(1) et F''(0) .

ii) Donner les variations de F sur$[-1,1]$ puis le signe de F(x) sur $[-1,1]$.

c-i) Montrer que f est une primitive d'une fonction φ sur] -1,1[.

ii)Donner le signe de φ(x) sur] -1,1[.

Bon Travail