

|                                    |   |   |
|------------------------------------|---|---|
| <i>Lycée secondaire<br/>Bembla</i> | <b>DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1</b><br>08/12/2009 | <i>Lycée secondaire<br/>Bennane-Bodheur</i> |
| <i>Mr: Yacoubi Hamda</i>           | <i>Durée : 3h *****4ème Math</i>            | <i>Mr: Bouhouch Ameur</i>                   |

### Exercice n°1:(3pts)

Pour chacune des trois premières questions, choisir la seule réponse correcte (aucune justification n'est demandée).

- 1) Soit le nombre complexe  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ , alors on a:
  - a)  $z^3=1$
  - b)  $z^3=-1$
  - c)  $z^6=-1$
- 2) Soient I et J deux points distincts. Alors l'application définie par  $S_I \circ S_J$  est :
  - a) une rotation
  - b) une symétrie orthogonale
  - c) translation
- 3) Soit ABCD un rectangle et soient  $E=A*B$  et  $F=D*C$ . alors si  $f=t_{\overline{AB}} \circ S_{(AD)}$  on a:
  - a) f est une symétrie glissante
  - b)  $f=S_{(EF)}$
  - c)  $f=S_{(BC)}$ .
- 4) Soit f une fonction définie sur IR et deux fois dérivables et ( $\zeta$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé et dont le tableau de variation de sa fonction dérivé f' est donné ci-dessous :

|          |                |   |                |
|----------|----------------|---|----------------|
| x        | $-\infty$      | 2 | $+\infty$      |
| $f''(x)$ | -              | 0 | +              |
| $f'(x)$  | $+\infty$<br>↘ | 1 | ↗<br>$+\infty$ |

Répondre par "Vrai" ou "Faux" à chaque question:

- a) La courbe représentative ( $\zeta$ ) de f admet un point d'inflexion d'abscisse 2.
- b) La courbe représentative ( $\zeta$ ) de f admet exactement deux tangentes horizontales.
- c) f est strictement décroissante sur  $] -\infty, 2]$ .

### Exercice n°2:(3pts)

Soit, dans C, l'équation (E):  $z^2 - (3 + i\sqrt{3})z + 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$

- 1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z' qu'on déterminera.
- 2) Déduire l'autre solution z'' de l'équation (E).
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on donne les points A et B d'affixes respectives  $2i$  et  $1 + i\sqrt{3}$ .
  - a) Placer les points A et B sur une figure.
  - b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

### Exercice n°3: (7pts)

Le plan est orienté dans le sens direct; soit ABCD un carré de centre O et tel que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

- 1) Soit  $f$  une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.
  - a) Montrer que  $f([BD]) = [BD]$ .
  - b) Prouver, alors, que  $f(O) = O$  et que  $f(A) = A$ .
  - c) En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABD.
- 2) Soit  $g$  une isométrie qui transforme le triangle ABD en le triangle BCD.
  - a) Montrer que l'application  $S_O$  est une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.
  - b) En déduire toutes les isométries qui transforment le triangle ABD en le triangle BCD.
- 3) On suppose que  $AB = 1$ . Le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .
  - a) Déterminer les affixes de chacun des points A, B, C et D.
  - b) Soit  $f$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  tel que  $z' = -\bar{z} + 1 + i$ . Montrer que  $f$  est une isométrie sans point invariant.
  - c) Déterminer  $f(A)$  et  $f(B)$  et déduire la nature de  $f$ .

### Exercice n°4: (7pts)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1, 2]$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ . On note  $(\zeta)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1)
  - a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche de 2. Interpréter graphiquement le résultat.
  - b) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]1, 2[$  et que  $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{2x-x^2}}$ .
- 2)
  - a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - b) Tracer la courbe  $(\zeta)$  de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 3)
  - a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $]1, 2]$  une solution unique  $\alpha$ .
  - b) Montrer que  $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ .
- 4) On pose  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .
  - a) Montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ .
  - b) Soit la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = g(U_n)$ .  
Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:  $U_n \in [1, 2]$ .
- 5) On admet que pour tout  $x \in [1, 2]$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$ .
  - b) Prouver que  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$  et en déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .