Mathématiques	**Devoir De Synthèse N° 1**	*LS : Rue Fattouma Bourguiba Monastir* *LS : Bourguiba Monastir*
4ème Maths		
Zemni - Abbes - Zouheir - Hergli		*08 / 12 / 2009, 3H*

Exercice N°1 : (3 points)

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta) : z^2 - (1+i+(1-i)e^{i\theta})\,z + (1+i)\,e^{i\theta} - i\,e^{i2\theta} = 0$.

1) a) Vérifier que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).

b) Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E_θ).

2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = -i\,z + 1 + i$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Montrer que $f(M_1) = M_2$.

c) Montrer que l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie est un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera. En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie.

Exercice N°2 : (4 points)

Dans la figure (1) ci-jointe , on considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].

Soit R la rotation de centre A qui transforme B en C.

Soit $\mathscr{C}'$ l'image de $\mathscr{C}$ par R. On désigne par O le centre de $\mathscr{C}$ et O' celui de $\mathscr{C}'$.

1) a) Construire $\mathscr{C}'$. Soit I le second point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ autre que A.

b) Montrer que I = B * C et préciser la nature du quadrilatère IOAO'.

2) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a) Montrer que f(A) = A et que f(I) = I.

b) En déduire toute les isométries qui laissent globalement invariant ABC.

3) Soient $r_1 = R_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$, $r_2 = R_{\left(O', \frac{\pi}{2}\right)}$, $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_2^{-1} \circ r_1$.

a) Préciser f(B) et g(B).

b) Caractériser les applications f et $\varphi = f \circ S_{(BC)}$.

c) Soit M un point du plan tel que $r_1^{-1}(M) = M_1$ et $r_2^{-1}(M) = M_2$. Montrer a l'aide de g que l'on caractérisera que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{BA}$.

Exercice N°3 : (3 points)

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sur $[0, 2]$.

2) a) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $]0, 2[$ et que pour tout

$$x \in]0, 2[, \ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}.$$

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 et en 2.

3) On pose pour tout $x \in [0, 2]$, $g(x) = f^{-1}(2 - x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, 2[$.

b) En déduire que pour tout x de $]0, 2[$, $f^{-1}(2 - x) = -f^{-1}(x)$.

Exercice N°4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter ces résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variations de f. Montrer que pour tout $x \in [2,3]$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]2, 3[$.

d) Tracer dans un repère ON la courbe ζ_f et la droite $\Delta : y = x$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f.

3) Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \le u_n \le 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le |u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le |u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n$.

En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

4ème Maths	***Devoir De Synthèse N° 1***	*08 / 12 / 2009, 3H*

<u>Feuille à compléter et à remettre avec la copie</u>

Nom : ……………………………. **Prénom :** ………………………….

<u>Exercice N° 5 :</u> (5 points)

La figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

I/ Cocher la bonne réponse.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 2 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 1 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)+1}{x} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{x-1} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{x-1} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-1}{x-2} =$ ☐ a) $-\dfrac{1}{2}$ ☐ b) 1 ☐ c) $\dfrac{1}{2}$

II/

1) Compléter au dessous le tableau de variation de f.

2) Déterminer l'équation de l'asymptote

   oblique à ζ_f : y = ……… x + ……….. .

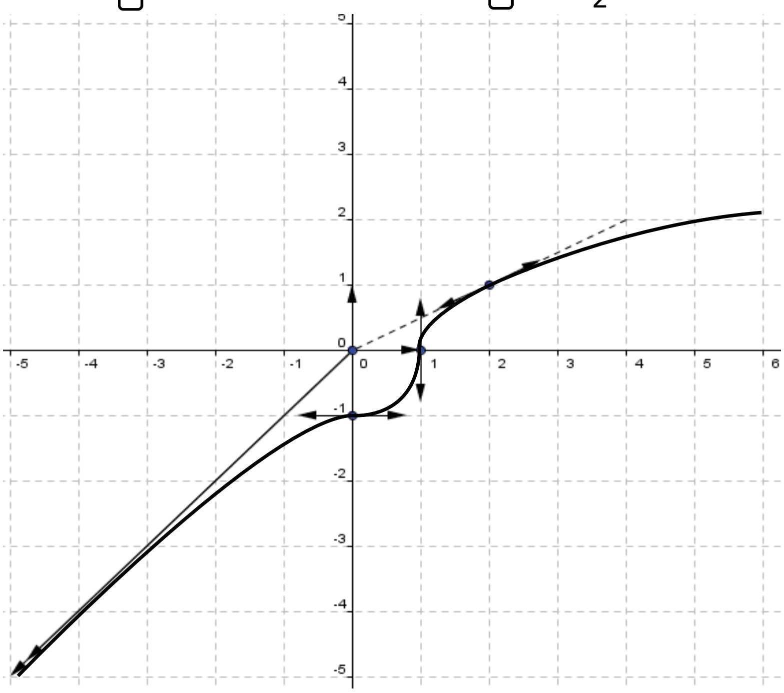
3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J ?

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

J = ………………………………

   b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f .



x	
f '(x)	
f(x)	

Figure (1) à compléter