

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé de reproduire la bonne réponse sur votre copie. L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

		A	B	C
1	Le chiffre des unités de 9^{2010} est	3	9	1
2	Si $x \equiv 2 \pmod{5}$ et $x \equiv 2 \pmod{3}$ alors	$x \equiv 4 \pmod{15}$	$x \equiv 2 \pmod{15}$	$x \equiv 0 \pmod{15}$
3	Si $3n \equiv n - 1 \pmod{7}$ alors	$n \equiv 4 \pmod{7}$	$n \equiv 3 \pmod{7}$	$n \equiv 2 \pmod{7}$

Exercice n°2 : (5 points)

Soit f l'application définie par : $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} ; z \mapsto \frac{i}{z} = Z'$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' . on considère les points $A(-i)$ et $B(-1)$.

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = (\bar{z})^2$. Donner solutions sous la forme algébrique
- a- Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$
b- En déduire que (OM) et (OM') sont perpendiculaires .
- Soit \mathcal{C} cercle de centre B et de rayon 1.
a- Montrer que $(\overrightarrow{Z' + i}) = -\frac{i}{z}(z + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$
b- En déduire que si M appartient à $\mathcal{C} - \{O\}$ alors $|z' + i| = |z'|$.
c- En déduire que si M appartient à $\mathcal{C} - \{O\}$ alors M' appartient à une droite D que l'on déterminera
- Etant donné un point M de $\mathcal{C} - \{O\}$, construire alors le point M'
- a- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, déterminer : $z_1 = (f \circ f)(z)$
b- En déduire que les points M et M₁ d'affixes respectives z et z_1 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on déterminera.

Exercice n°3 : (5 points)

Soit ABCD un rectangle tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AB=2AD$. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et soit $K = S_J(I)$

1) On pose $f = S_{IC} \circ t_{\vec{AB}} \circ S_{IJ}$

- a/ Identifier l'application $S_{BC} \circ S_{IJ}$
b/ En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2) On pose $g = f \circ S_{IJ}$

- a/ Déterminer $g(A)$, $g(D)$ et $g(I)$
b/ Démontrer que s'il existe un point M invariant par g , alors les droites (DI), (IJ) et (DC) sont concourantes.
c/ Montrer alors que g est symétrie glissante

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{A}, \vec{AI}, \vec{AD})$.

Soit l'application $h : P \rightarrow P ; M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que : $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

- a/ Montrer que h est une isométrie.
b/ Déterminer les affixes des points C ; J et K
c/ Déterminer $h(A)$; $h(D)$ et $h(I)$. En déduire que $h = g$
d/ Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur \vec{u}

Exercice n°4 : (8 points)

A / Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b/ Dresser le tableau de variation de f .
c/ Déduire que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle I que l'on déterminera.
2) a/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R}_+ une solution unique α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
b/ Construire ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère
c/ Montrer que f^{-1} est dérivable à gauche de 1 et que : $(f^{-1})'(1) = 0$.
d/ Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$
3) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
b/ Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
c/ En déduire que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \alpha|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

B / Soit la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f[\tan(x)]$

- 1) Montrer que g est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2) a/ Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$
b/ Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur I.
c/ Montrer que g^{-1} est dérivable sur I et que $(g^{-1})'(x) = \frac{-2x(1-x)}{x^4 + (1-x)^4}$.