Lycée Menzah 9 Mr BEN BADR	Devoir de synthèse N° 1	Décembre.2010 Classe : 4ème M1 Durée : 3h

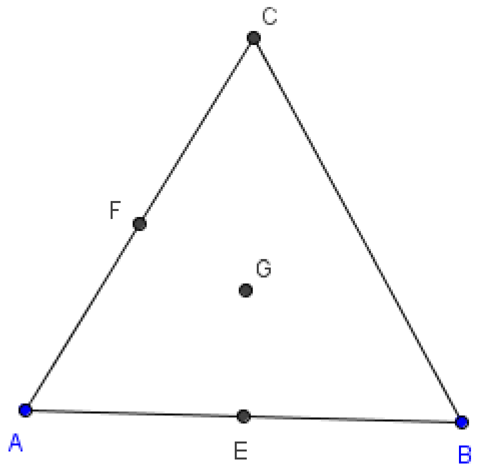
Le sujet comporte 4 pages numérotées de (1sur 4) à (4sur 4). La page (4sur 4) est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

I. Le plan est orienté dans le sens direct ; dans la figure ci-dessous ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. E et F sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

On désigne par $S_{(BF)}$, $S_{(CE)}$, $S_{(BC)}$, $S_{(EF)}$ et $S_{(AG)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (BF), (CE), (BC), (EF) et (AG).



1. L'isométrie $S_{(BF)} \circ S_{(CE)}$ est :

a) La rotation de centre G et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

b) La rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

c) La rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(EF)} \circ S_{(AG)}$ est :

a) La symétrie orthogonale d'axe (CE).

b) La symétrie glissante d'axe (BC) et de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

c) La symétrie glissante d'axe (AG) et de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

II. On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ telles que $u_n = \frac{1}{n}$. Alors :

a) la suite (v_n) converge vers 1.

b) la suite (v_n) est croissante.

c) la suite (v_n) est décroissante.

III. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$. Alors :

a) $|f(-5) - f(3)| \le 2$.

b) $|f(-5) - f(3)| \le 1$.

c) $|f(-5) - f(3)| \le 4$.

Exercice 2 (3 points)

Dans le graphique ci-joint voir annexe (page 4 sur 4), on a représenté dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe (C) d'une fonction f définie, continue sur $[-2,2[$ et dérivable sur $]-2,2[$.

- La droite d'équation $x=2$ est une asymptote à (C).
- La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point $A(-2,0)$.
- La droite (AB) est tangente à (C) au point $B(0,-1)$.
- La courbe (C) n'admet aucune tangente horizontale.

1. Utiliser le graphique pour répondre.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)}{x+2}$ et $f'(0)$.
   b) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2,2[$ sur un intervalle J que l'on précisera. (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et on désignera par (C') sa courbe représentative).
2. Tracer la courbe (C') dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
3. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$. En déduire une approximation affine de $f^{-1}(-0.999)$.

Exercice 3 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct Dans l'annexe ci-jointe (page 4 sur 4), on donne un rectangle ABDC de centre O tel que $AC=2AB$ et on désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AI]$ et $[BD]$.

1. a) Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante f qui envoie A en I et B en C.
   b) Déterminer l'image du triangle ABI par f. En déduire que $f(I)=K$.
   c) Déterminer la forme réduite de f.
   d) Soit H l'image de O par f. Montrer que IJKH est un parallélogramme.
2. Soit $g=f\circ S_{(AB)}$.
   a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.
   b) Montrer que g est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Construire son centre G.
   c) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Justifier que $g=t_{\overrightarrow{AI}}\circ R$.
3. Soit E l'image du point I par R et F le point tel que AEFI soit un carré.
   a) Caractériser $g\circ g$.
   b) Déterminer $(g\circ g)(A)$.
   c) Montrer que G est le centre du carré AIFE.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\pi x)}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ sur $[1,+\infty[$.
2. On désigne par g la réciproque de f.
   a) Calculer $g(2)$.
   b) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.
3. Soit n un entier naturel non nul.

   On considère la fonction f_n définie sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ par $f_n(x) = f(x) - x^n - 2$.
   a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ une solution unique α_n.
   b) Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$. En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.
   c) Montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente.
   d) Montrer que $\alpha_n = g(2+\alpha_n^n)$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

<u>Exercice 5 (4 points)</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, -1, - i.

Dans la figure ci-jointe voir annexe (page 4 sur 4) AM_2M et BMM_1 sont deux triangles rectangles, isocèles et directs respectivement en M_2 et M_1 et on désigne par z, z_1 et z_2 les affixes respectives des points M, M_1 et M_2.

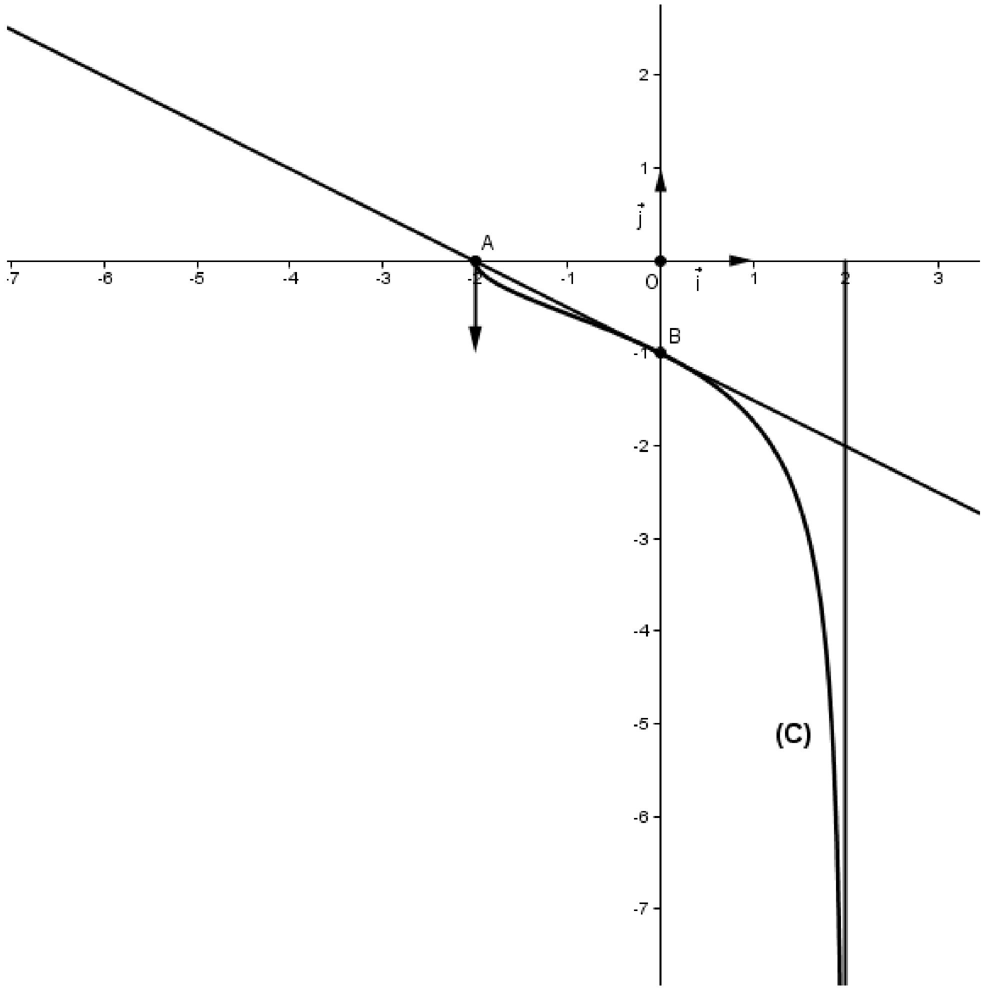
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle, isocèle en O et direct.

1. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = iz + z_1(1-i)$.
   a) Montrer que f est la rotation de centre M_1 qui envoie B en M.
   b) En déduire que $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$.
   c) En considérant la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, montrer que $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$.
2. a) Montrer que $OM_1 = OM_2$ si et seulement si $|z+1| = |z+i|$.
   b) En déduire l'ensemble Δ des points M tels que $OM_1 = OM_2$. Tracer Δ sur la figure.
3. a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}}\right) - \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   b) En déduire la position du point M pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle, isocèle en O et direct. Placer le point M sur la figure.

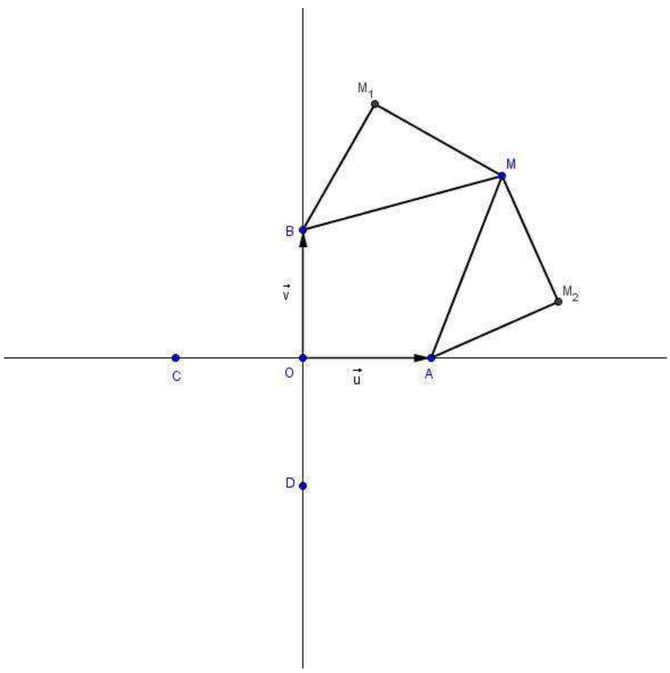
Annexe à rendre avec la copie

Nom : .... Prénoms : ....

Annexe de l'exercice 2



Annexe de l'exercice 5



Annexe de l'exercice 3