*Lycée secondaire Bennane-Bodheur*

**DEVOIR DE SYNTHESE N°1**

**Durée:3H**

*Classe : 4ème Math* | **Le 06/12/2011** | *Mr : Bouhouch Ameur*

L'examen comporte trois pages numérotées de 1 à 3.

## Exercice n°1: *(3pts)*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Si f($x$)= $(x^2-x)(x-2)$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé, alors le nombre des tangentes horizontales à (C) est égal à:

a) 1 b) 2 c) 3

2) Soit ($\Delta$) une droite et un point $I \notin (\Delta)$. Alors $S_I o S_\Delta$ est :

a) une rotation b) symétrie axiale c) symétrie glissante.

3) Si ($U_n$) est une suite réelle vérifiant $U_o$=1 et $U_{n+1}=U_n+\dfrac{1}{1+U_n^2}$ , alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ =

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

4) Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On désigne par ($\Delta$), ($\Delta'$) et ($\Delta''$) les médiatrices respectives des cotés [AB],[AC] et [BC].Alors $S_{\Delta''} o S_{\Delta'} o S_\Delta$ est:

a) $S_{(OA)}$ b) $S_{(OB)}$ c) $S_{(OC)}$

## Exercice n°2: *(5pts)*

Dans le plan orienté, soit un rectangle ABCD tel que AB=2AD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] et K le symétrique de I par rapport à (DC).

1) On pose $f = S_{(IC)} o t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$.

a) Caractériser l'application $S_{(BC)} o S_{(IJ)}$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2) On pose $g = t_{\overrightarrow{IK}} o S_{(IC)}$.

a) Montrer que $g o S_{(AJ)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3) Montrer que le quadrilatère ICKD est un carré.

4) Déterminer toutes les isométries qui laissent le triangle IBC globalement invariant.

5) Soit $\varphi$ une isométrie qui transforme le triangle IBC en le triangle JCK et R la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $R o \varphi$ laisse le triangle IBC globalement invariant.

b) Déterminer alors toutes les isométries qui transforment le triangle IBC en JCK.

## ***Exercice n°3:*** *(4pts)*

Soit f une fonction définie sur IR et deux fois dérivables. Dans la figure ci-dessous, on a représenté la courbe représentative (C) de la fonction dérivée f ' de f.

Notons que:

* L'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de l'infini.

* $f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(1)>1$.

* La courbe représentative ( Γ ) de f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

1) Par une lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

   a) Déterminer le sens de variation de f.

   b) ( Γ ) admet-elle un point d'inflexion? Justifier votre réponse.

   c) Déterminer $f'([1,+\infty[)$ et en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $x \geq 1$.

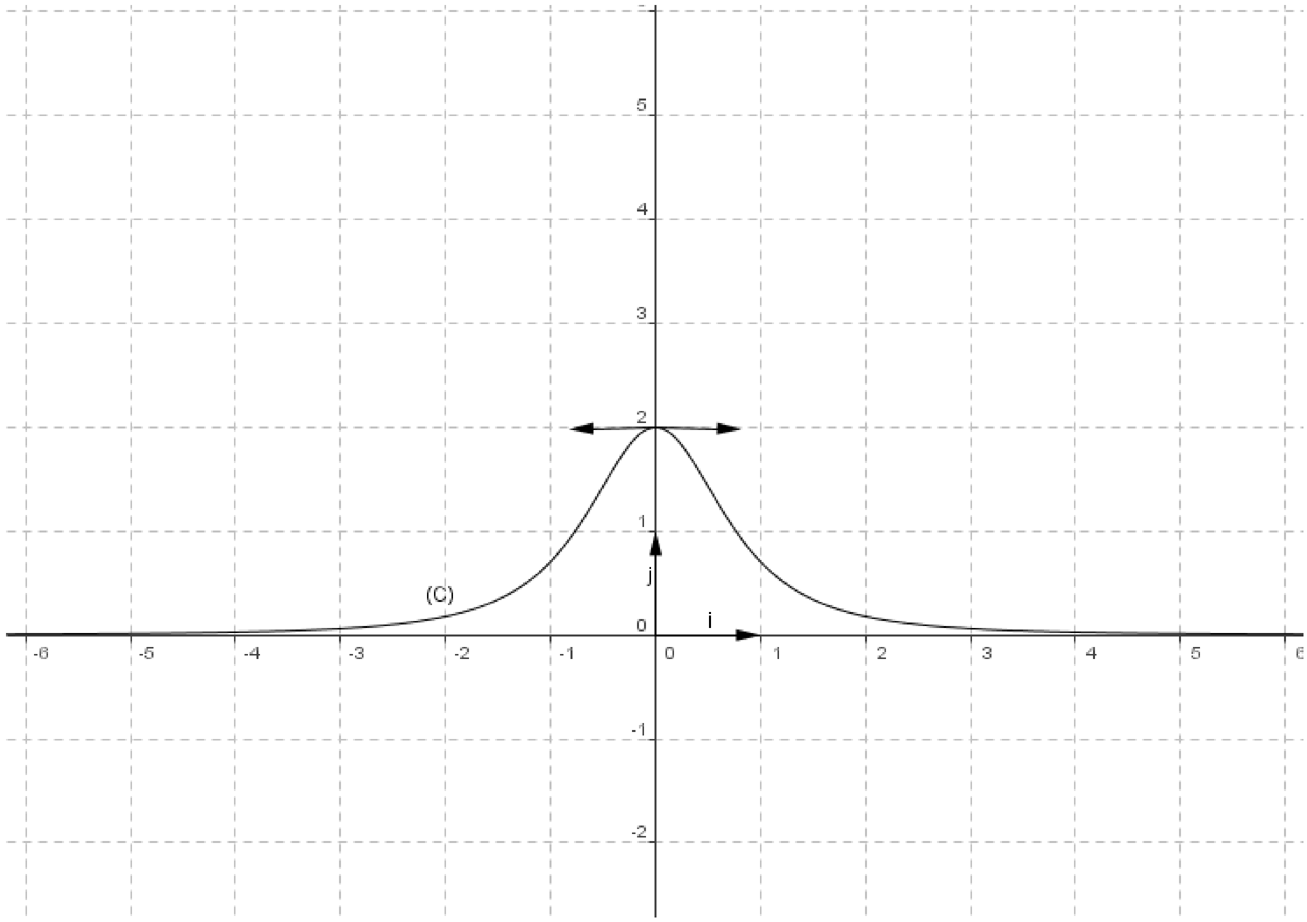
2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha \geq 1$

3) Soit la suite réelle définie sur IN par $U_o=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

   a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $U_n \geq 1$.

   b) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\alpha|$.

   c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, on a : $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_o-\alpha|$ et calculer la limite de cette suite.




Mr.Bouhouch Ameur

## *Exercice n°4:* *(3,5pts)*

1) On considère le nombre complexe $a = -4\sqrt{3} - 4i$ .
Déterminer le module et un argument de $a$.

2) Résoudre dans C l'équation $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i$ .
(On donnera les solutions sous forme trigonométrique)

3) Soit $u = (-1-i) + \sqrt{3}(1-i)$ .
   a) Calculer $u^2$ .
   b) En déduire le module et un argument de $u$ .
   c) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ,on considère les points A, B et C d'affixes respectives $u$ ; $\sqrt{3}(1-i)$ et $(-1-i)$ .
   Montrer que OBAC est un rectangle.

## *Exercice n°5:* *(4,5pts)*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I= $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par f($x$)= $\sqrt{1+\tan x}$ .

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
3) On note g = $f^{-1}$.
   Montrer que g est dérivable sur J et que g'($x$)= $\dfrac{2x}{1+(x^2-1)^2}$ pour tout $x \in$J.
4) a) En appliquant le théorème des accroissements finis à g. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \left]1, \sqrt{2}\right[$ tel que : $\dfrac{2\alpha}{1+(\alpha^2-1)^2} = \dfrac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}$.
   b) En déduire que $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x+\alpha) - g(\alpha - x)}{x}$ est un réel indépendant de $\alpha$ .

***BON TRAVAIL***

Mr.Bouhouch Ameur